Exercice 1

Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphismes f et g d'un même espaces vectoriels E de dimension finie non nulle vérifiant $f \circ g - g \circ f = Id_E$.

Exercice 2

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une matrice colonne C et une matrice ligne L telles que $M = C.L$.
2. En déduire que $M^2 = tr(M)M$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit la matrice d'un projecteur.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $tr(A) \neq 0$. On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ par

$$f(M) = tr(A)M - tr(M)A$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
2. Déterminer le noyau de f, puis son image.

Exercice 4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Vérifier que $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mapsto tr(AM)$ est bune forme linéaire. Calculer $\varphi(E_{ij})$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ (avec E_{ij} matrice élémentaire).
2. Réciproquement, établir que toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de ce type.

Exercice 5

1. Soient a, b, c, d des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
   Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $f(x) = \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}$.
   Montrer que f est dérivable avec $f'(x) = \begin{vmatrix} a'(x) & b(x) \\ c'(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b'(x) \\ c(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.
2. Généraliser à une matrice $n \times n$.
3. En déduire la valeur de $\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+\alpha) & \sin(x+\alpha) \\ 1 & \cos(x+\beta) & \sin(x+\beta) \end{vmatrix}$ pour $(x, \alpha, \beta) \in \mathbf{R}^3$.

Exercice 6

Montrer que si $z_0, \dots, z_n$ sont des complexes distincts deux à deux alors $((X - z_0)^n, \dots, (X - z_n)^n)$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

Exercice 7

Soit a, b, c, d quatre complexes. Donner une expression factorisée de $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

On pourra inrtoduire la fonction polynômiale $P : x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un segment $[a, b]$. On considère $n+1$ réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que $a \leqslant a_0 < a_1 < \cdots < a_n \leqslant b$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_n(f)$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad f(a_k) = L_n(f)(a_k)$. Donner une expression de ce polynôme (appelé polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points a_k).
2. On fixe x dans $[a, b] \setminus \{a_0, \ldots, a_n\}$.
   (a) Déterminer un réel λ tel que la fonction $F : t \mapsto f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \prod_{k=0}^{n}(t - a_k)$ s'annule en x.
   (b) Justifier qu'il existe $c_x \in]a, b[$ tel que $f(x) - L_n(f)(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n}(x - a_k)$.
3. On pose $\|f^{n+1)}\|_\infty = \underset{[a,b]}{Sup}|f^{(n+1)}|$. Montrer qu'il existe un réel K indépendant de n tel que $\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - L_n(f)(x)| \leqslant \dfrac{K^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty$.
4. Soit $f : x \in [-1, 1] \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. En utilisant le développement limité de f en 0, montrer que $\forall k \in \mathbf{N} \quad \|f^{(2k)}\|_\infty \geqslant (2k)!$.
5. Expliquer pourquoi cette dernière inégalité peut empêcher la convergence de la suite des polynômes $L_n(f)$ vers f. (*Phénomène de Runge*)

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X^3 + X^2 - X - 1$ est un polynôme annulateur de A.
2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$.
   (a) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que $P(A) = aA^2 + bA + cI_3$.
   (b) Exprimer a, b, c en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(-1)$.
   (c) En déduire trois matrices B, C, D telles que $P(A) = P(1)B + P(-1)C + P'(-1)D$.

Exercice 10

Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $AB = P(A)$.

1. Justifier que A est inversible.
2. Justifier que B et A commutent.

Exercice 11

Soit f et g deux endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f \circ g - g_c icf = f$.

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $f^n \circ g - g \circ f^n$.
2. En déduire que si P est un polynôme annulateur de f alors XP' en est un aussi.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ de rang 1, avec $n \geqslant 2$.

1. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel $\{P(A), \quad P \in \mathbf{C}[X]\}$.

Exercice 13

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, a un scalaire non nul et f un endomorphisme de E dont $P = X^3 - 3aX^2 + a^2X$ est un polynôme annulateur.

1. Montrer que $E = Ker(f) \oplus Ker(f^2 - 3af + a^2 Id_E)$.
2. $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 14

Soit $a_0, \ldots, a_n$ des complexes distincts deux à deux.
Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $E_k = \{P \in \mathbf{C}_n[X], \quad \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\} \quad P(a_j) = 0\}$.
Prouver l'égalité $\mathbf{C}_n[X] = \displaystyle\bigoplus_{k=0}^{n} E_k$.

Exercice 15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $M = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ A & O_n \end{pmatrix}$. Pour $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k X^k$, exprimer la matrice $P(A)$ comme une matrice par blocs.

Exercice 16

Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $rg(u) = n$.
   (a) Montrer que $Ker(u) = Im(u)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $rg(u) = 2n$.
   (a) Montrer que $Ker(u) = Im(u^2)$.
   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} O_n & I_n & O_n \\ O_n & O_n & I_n \\ O_n & O_n & O_n \end{pmatrix}$.