1 Autour de l'intégrale de Dirichlet

Partie I -

I.A- Pour tout $x>0$, la fonction $u : t \mapsto \dfrac{-\cos(xt)}{x}$ et la fonction f sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on en déduit par intégration par parties, que pour tout $x>0$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_a^b f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)u'(t)\mathrm{d}t = [f(t)u(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)u(t)\mathrm{d}t \\ I(x) &= \frac{f(a)\cos(ax)-f(b)\cos(bx)}{x} + \frac{1}{x}\int_a^b f'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Pour tout $x>0$ et tout $t\in[a,b]$, on a : $|cos(xt)|\leqslant 1$, d'où par inégalité triangulaire dans $\mathbf{R}$ puis pour l'intégrale sur un segment :

$$\forall x>0, \quad 0 \leqslant |I(x)| \leqslant \frac{1}{x}\left(|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$$

On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{x\to+\infty}|I(x)|=0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = 0.}$

I.B- On note $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$, pour $n\in\mathbf{N}$.

I.B.1) • La fonction f_0 est nulle sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\underline{J_0 \text{ existe}}$.

• Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, la fonction $f_n : t\mapsto \dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $f_n(t)\underset{0}{\sim}\dfrac{nt}{t}$, donc f est prolongeable par continuité en 0, et on en déduit que $\underline{J_n\text{, qui est faussement impropre en 0, existe pour tout } n\in\mathbf{N}^*}$.

I.B.2) Par calcul direct : $J_0=0, \quad J_1=\dfrac{\pi}{2}, \quad J_2=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos(t)\mathrm{d}t = 2.$

En utilisant : $\sin(3t)=3\sin(t)-4\sin^3(t)=3\sin(t)-2\sin(t)(1-\cos(2t))$, on obtient :

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(3t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+2\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

I.B.3) Par relation trigonométrique, pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} \sin(nt)-\sin((n-2)t) &= 2\sin\left(\frac{nt-(n-2)t}{2}\right)\cos\left(\frac{nt+(n-2)t}{2}\right) \\ &= 2\sin(t)\cos((n-1)t) \end{aligned}$$

On en déduit par intégration sur un segment que $\boxed{J_n - J_{n-2} = \dfrac{2}{n-1}\sin\left(\dfrac{(n-1)\pi}{2}\right).}$

- On déduit de l'égalité précédente que : $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad J_{2k+1} = J_{2k-1}$, la suite $(J_{2k+1})_k$ est constante donc $\boxed{J_{2k+1} = J_1 = \frac{\pi}{2}.}$

- Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$J_{2k} - J_{2k-2} = 2\frac{\sin(k\pi - \pi/2)}{2k-1} = -2\frac{\sin(\pi/2 - k\pi)}{2k-1} = -2\frac{\cos(k\pi)}{2k-1} = 2\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(J_{2k} - J_{2k-2}) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$, par télescopage puisque $J_0 = 0$:

$$\boxed{J_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}}$$

De plus la série alternée $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ vérifie le critère spécial des séries alternées puisque la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{2k-1}\right)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0. J_{2n} s'écrit bien comme la somme partielle d'une série convergente.

Ceci implique que la suite $(J_{2k})_k$ converge, mais cela n'a pas vraiment d'intérêt ici.

I.B.4) D'après les relations trigonométriques, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(nt) - \sin((n-1)t)}{\sin(t)} &= \frac{\sin(nt) - \sin(nt)\cos(t) + \sin(t)\cos(nt)}{\sin(t)} \\
&= \cos(nt) + \frac{\sin(nt)(1-\cos(t))}{2\sin(t/2)\cos(t/2)} \\
\frac{\sin(nt) - \sin((n-1)t)}{\sin(t)} &= \cos(nt) + \frac{2sin^2(t/2)}{2\sin(t/2)\cos(t/2)}\sin(nt)
\end{aligned}$$

et donc

$$J_n - J_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt) + \tan(t/2)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \cos(nt)$ est continue sur le segment $[0, \pi/2]$, alors par linéarité et après calcul de la première intégrale, on obtient :

$$J_n - J_{n-1} = \frac{\sin(n\pi/2)}{n} + \int_0^{\pi/2} \tan(t/2)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \tan(t/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, \pi/2]$, donc par le résultat de la question 1) et par encadrement pour $\displaystyle\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(J_n - J_{n-1}) = 0.}$

On sait que $J_{2k-1} = \frac{\pi}{2}$, le résultat précédent donne donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(J_{2k} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ et finalement les suites $(J_{2k})_k$ et $(J_{2k+1})_k$ convergent toutes deux vers $\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}}$$

I.B.5) D'après ce qui précède, $J_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 2\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{2i+1}$, par convergence de la suite $(J_{2n})_n$ vers $\frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\boxed{\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.}$$

I.C-

I.C.1) Soit a un réel strictement positif et $n \in \mathbf{N}^*$.

<u>*1ère méthode*</u> :

La fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est définie et continue sur $\mathbf{R}\setminus\{k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$, par quotient de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ensemble considéré.
On remarque que f_n est paire et 2π-périodique, on va montrer que f_n se prolonge par continuité sur $[0, \pi]$, et alors elle se prolongera par continuité sur $\mathbf{R}$.
f_n est prolongeable par continuité en 0 (voir question I.B.1)).

Pour t au voisinage de π, on peut écrire $t = \pi + h$ avec h au voisinage de 0 et alors

$$f_n(t) = f_n(\pi+h) = \frac{\sin(n\pi + nh)}{\sin(\pi + h)} = \frac{\cos(n\pi)\sin(nh)}{-\sin(h)} = \frac{(-1)^n \sin(nh)}{-\sin(h)} = (-1)^{n+1}\frac{\sin(nh)}{\sin(h)}$$

On en déduit que $\lim_{t\to\pi} f_n(t) = \lim_{h\to 0} f_n(\pi + h) = (-1)^{n+1}n$ et donc f_n est prolongeable par continuité en π.

Finalement, f est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$ et donc particulièrement sur $[0, a]$ avec $a > 0$.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^a f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\mathrm{d}t \text{ existe donc.}}$$

<u>*2nde méthode*</u> :

Soit $a > 0$, il existe un unique $p \in \mathbf{N}$ tel que $a \in [p\pi, (p + 1)\pi[$ $\left(p = \left\lfloor \frac{a}{\pi} \right\rfloor\right)$. On peut écrire
$[0, a] = [0, \pi] \cup [\pi, 2\pi] \cup \ldots \cup [p\pi, a]$, or la fonction $f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}$ est continue sur tout intervalle $]k\pi, (k + 1)\pi[$ avec $k \in \{0, \ldots, p - 1\}$.

En notant $t = k\pi + h$ avec h au voisinage de 0 (pour que t soit au voisinage de $k\pi$), on obtient, par relations trigonométriques :

$$f_n(t) = f_n(k\pi + h) = \frac{\sin(nh)\cos(nk\pi)}{\sin(h)\cos(k\pi)} = \frac{\sin(nh)}{\sin(h)}\frac{(-1)^{nk}}{(-1)^k} \underset{0}{\sim} n(-1)^{(n-1)k}$$

donc $\lim\limits_{t\to k\pi} f_n(t) = \lim\limits_{h\to 0} f_n(k\pi + h) = n(-1)^{(n-1)k}$, et finalement f_n est prolongeable par continuité en tout point $k\pi$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_n \text{ se prolonge par continuité sur } [0, a]\text{, d'où l'existence de } \int_0^a f_n(t)\mathrm{d}t.}$$

I.C.2) Soit $a \in]0, \pi[$. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ est clairement de classe C^1 sur $]0, a]$ ($0 < a < \pi$, donc x et $\sin(x)$ ne sont pas nul pour $x \in]0, a[$).

On rappelle que si $f(x) \underset{0}{=} a + bx + o(x)$ alors f est dérivable en 0 avec $f'(0) = b$. Cherchons donc un développement limité à l'ordre 1 en 0 de f pour montrer que f est dérivable en 0 :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \text{ et } \frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + o(u)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \\
&\underset{0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x(x + o(x^2))} \\
&\underset{0}{=} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} \\
&\underset{0}{=} \frac{-\frac{x}{6} + o(x)}{1 + o(x)} \\
&\underset{0}{=} \left(-\frac{x}{6} + o(x)\right)(1 - o(x)) \\
f(x) &\underset{0}{=} -\frac{x}{6} + o(x)
\end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.

$$\forall x \in]0, a], \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2\cos(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$$

On sait que $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ au voisinage de 0 alors

$$f'(x) = \frac{x^2 - x^4/2 - (x - x^3/6 + o(x^3))^2}{x^4 + o(x^4)} = \frac{x^2 - x^4/2 - x^2 + 2x^4/6 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$f'(x) = \frac{-1/6 + o(1)}{1 + o(1)}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{6} = f'(0)$.

$$\boxed{f \text{ est finalement de classe } C^1 \text{ sur } [0,a].}$$

I.C.3) Pour $a \in]0,\pi[$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{t}$ est continue sur $]0,a]$ et se prolonge par continuité en 0 $(\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(nt)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{nt}{t} = n)$, donc on peut écrire :

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

La fonction f est de classe C^1 sur $[0,a]$ alors par application de la propriété vérifiée dans la question 1., on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t - \int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin t}\mathrm{d}t\right) = 0}$$

I.C.4)
- Si $a = \dfrac{\pi}{2}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{\sin t}\mathrm{d}t\right) = 0 = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t - J_n\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$, par somme de limites finies, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

- Si $a < \dfrac{\pi}{2}$, par relation de Chasles, on peut écrire :

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\sin(nt)\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $[a,\pi/2]$ alors par le résultat de la question 1., on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$ et par somme de limites finies, on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

- Si $a > \dfrac{\pi}{2}$, par relation de Chasles :

$$\int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^a \frac{1}{t}\sin(nt)\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $[\pi/2, a]$ alors par le résultat de la question 1., on sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t}\sin(nt)\mathrm{d}t = 0$ et par somme de limites finies, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

Finalement on a toujours :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^a \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

I.D- La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0, n\pi]$, $n \in \mathbf{N}^*$, alors par le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{n}$, on a :

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin(nu)}{u}\mathrm{d}u$$

D'après le résultat de la question précédente,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(nt)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

On note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. En considérant la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité en 0, F est définie sur $\mathbf{R}^+$.

Soit $x > 0$, notons $n_x = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$ alors $n_x\pi \leqslant x < n_x\pi + \pi$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} n_x = +\infty$.
On peut écrire :

$$F(x) = \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \int_{n_x\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

On remarque que

$$\left|\int_{n_x\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{n_x\pi}^{x} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_x\pi}^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_{n_x\pi}^{x} \frac{1}{n_x\pi}\mathrm{d}t$$

et donc

$$\left|\int_{n_x\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{x - n_x\pi}{n_x\pi} \leqslant \frac{\pi}{n_x\pi}$$

Par théorème d'encadrement on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{n_x\pi}^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = 0$$

On en déduit que :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{n_x\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_0^{x} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = I_1}$$

On posera $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

I.E- Comme vu précédemment, on peut considérer la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ prolongée par continuité en 0.

- Pour $k \in \mathbf{N}$, en effectuant le changement de variable affine $t = u + k\pi$ on obtient
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(u+k\pi)|}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u$$
Or $\sin(u+k\pi) = (-1)^k \sin(u)$ et donc $|\sin(u+k\pi)| = |\sin(u)|$, or $\forall u \in [0,\pi], \quad \sin(u) \geqslant 0$

finalement $\boxed{\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u}$

- Si l'application $\left[t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}\right]$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ converge, et par caractérisation séquentielle $\displaystyle\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, par relation de Chasles et en utilisant l'égalité trouvée précédemment, on peut écrire :
$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\mathrm{d}u$$
Or pour $k \in \mathbf{N}$ si $u \in [0,\pi]$ alors $\dfrac{1}{(k+1)\pi} \leqslant \dfrac{1}{u+k\pi}$ et $\dfrac{\sin(u)}{(k+1)\pi} \leqslant \dfrac{\sin(u)}{u+k\pi}$ donc par intégration sur $[0,\pi]$ et somme on a :
$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin(u)\mathrm{d}u$$
$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(u)\mathrm{d}u = [-\cos(u)]_0^{\pi} = 2$, on a donc :
$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$$
$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
On sait que la série harmonique $\sum \dfrac{1}{k}$ diverge, et comme c'est une série à termes positifs, la suite de ses sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$, qui est croissante, diverge vers $+\infty$.

Par comparaison sur des suites, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$ et donc

$\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \dfrac{\sin t}{t} \text{ n'est pas intégrable sur }]0,+\infty[.}$

Partie II -

II.A- Soit $n \geq 2$. L'application $\left[t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n\right]$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 ($\sin(t) \underset{0}{\sim} t$). De plus

$$\forall t > 0 \qquad \left|\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n\right| = \frac{|\sin(t)|^n}{t^n} \leqslant \frac{1}{t^n}$$

et on sait que pour $n \geq 2$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n$ est aussi intégrable en $+\infty$ et $\boxed{\text{l'application } \left[t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n\right] \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$

On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$.

II.B- Les fonctions $u : t \mapsto \sin^2(t)$ et $v : t \mapsto \frac{-1}{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
$\sin(t) \underset{0}{\sim} t$, alors $u(t)v(t) \underset{0}{\sim} t$ et donc $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$. On a aussi $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par produit d'une fonction bornée avec une fonction de limite nulle.

Alors par intégration par parties puisque $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ converge on a :

$$\begin{aligned}
I_2 &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2\cos(t)\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \\
I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Par le changement de variable affine $u = 2t$, on a aussi :

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u = I_1$$

II.C- Soit $n \in \mathbf{N}$, avec la même méthode qu'en question I.E (relation de Chasles et changement de variable affine $t = u + k\pi$), on peut écrire

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n+1} \mathrm{d}t \\
&= \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^{2n+1} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(u+k\pi)}{u+k\pi}\right)^{2n+1}\mathrm{d}u\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\int_0^{\pi}\left(\frac{(-1)^k\sin(u)}{u+k\pi}\right)^{2n+1}\mathrm{d}t\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}(-1)^{k(2n+1)}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(u)}{u+k\pi}\right)^{2n+1}\mathrm{d}u\\
I_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(u)}{u+k\pi}\right)^{2n+1}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

II.D- • Pour $n\in\mathbf{N}^*$, $I_{2n}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^{2n}(t)}{t^{2n}}\mathrm{d}t$. La fonction $t\mapsto\dfrac{\sin^{2n}(t)}{t^{2n}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, positive et non identiquement nulle sur $]0,+\infty[$ alors par stricte positivité de l'intégrale on sait que $I_{2n}>0$.

• Pour $n\in\mathbf{N}$, on a $I_{2n+1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(u)}{u+k\pi}\right)^{2n+1}\mathrm{d}u=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$ avec $a_k=\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(u)}{u+k\pi}\right)^{2n+1}\mathrm{d}u\geqslant 0$. On peut écrire :

$$I_{2n+1}=a_0-a_1+\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k a_k$$

Pour $k\in\mathbf{N}$, $\forall u\in]0,\pi[,\quad 0<u+k\pi<u+(k+1)\pi$ et $\sin(u)\in]0,1]$ donc

$$0<\frac{\sin(u)}{u+(k+1)\pi}<\frac{\sin(u)}{u+k\pi}<\frac{\sin(u)}{k\pi}\leqslant\frac{1}{k\pi}$$

et par stricte croissance de la fonction $t\mapsto t^n$ sur $\mathbf{R}^+$ et intégration sur $]0,\pi[$

$$0<a_{k+1}<a_k\leqslant\frac{\pi}{k^n\pi^n}$$

La suite (a_k) est donc strcitement décroissante et converge vers 0, on en déduit que la série alternée $\sum(-1)^k a_k$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

On sait alors que les reste $R_1=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}(-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme $(-1)^2a_2$, donc $I_{2n+1}=a_0-a_1+R_1\geqslant a_0-a_1>0$.

$$\boxed{\text{Finalement } \forall n\in\mathbf{N}\quad I_n>0.}$$

2 Calcul d'une intégrale

1. Pour tout réel $x\in]-1,1[$, on pose $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^2+2xt+1}\mathrm{d}t$.

Pour $x \in]-1,1[$, et pour $t \in \mathbf{R}$, on peut écrire :

$$t^2 + 2xt + 1 = (t+x)^2 + 1 - x^2 > 0$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[$, la fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2xt+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$, de plus

$$f_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

d'après les intégrales de Riemann la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, alors par comparaison f_x est intégrable en $+\infty$ et finalement f_x est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2xt+1}\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

De plus pour tout x de $]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2+1-x^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1+\left(\dfrac{t+x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}t \\
F(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\arctan\left(\frac{t+x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2xt+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)}$$

Pour $x \in]-1,1[, \quad \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin(x)$ *et donc* $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arccos(x)$, *mais la première égalité n'est pas au programme officiel, donc il faut le démontrer si on veut l'utiliser. On laissera donc sous la forme encadrée ci-dessus.*

2. On pose alors, pour tous réels a et b tels que $a^2 - 4b < 0$: $G(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+at+b}\mathrm{d}t$.

   Puisque $a^2 - 4b < 0$ on sait que $b > 0$ et $\forall t \in \mathbf{R}, \quad t^2+at+b > 0$, de plus $\dfrac{1}{t^2+at+b} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$, donc l'intégrale $G(a,b)$ converge.

   On peut aussi écrire

$$G(a,b) = \frac{1}{b}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\frac{t^2}{b^2} + \frac{a}{b}t + 1}\mathrm{d}t$$

On en déduit, par le changement de variable affine $t = u\sqrt{b}$, que

$$G(a,b) = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 2\frac{a}{2\sqrt{b}}u + 1} \mathrm{d}u$$

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad a^2 - 4b < 0 \Longrightarrow G(a,b) = \frac{1}{\sqrt{b}} F\left(\frac{a}{2\sqrt{b}}\right)}$$

3. Pour $a > 0$ et $a^2 - 4b < 0$, $\forall x \in \mathbf{R}, \quad x^2 - ax + b > 0$ et $x^2 + ax + b > 0$ (polynôme du second degré sans racine réelle de coefficient dominant positif). On cherche deux réels λ et μ tels que :

$$\Phi(X) = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + aX + b)(X^2 - aX + b)} = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 + aX + b} + \frac{-\lambda X + \mu}{X^2 - aX + b}$$

Par réduction au même dénominateur et identification des numérateurs, on obtient :

$$\Phi(X) = \frac{\lambda X + \mu}{X^2 + aX + b} + \frac{-\lambda X + \mu}{X^2 - aX + b} \iff X^2 + 1 = (-2\lambda a + 2\mu)X^2 + 2b\mu$$

et par unicité des coefficients d'un polynôme, on a : $\boxed{\mu = \frac{1}{2b} \text{ et } \lambda = \frac{1 - b}{2ab}.}$

4. En raison de la question précédente, et puisque le polynôme $P(X) = X^4 + X^2 + \frac{1}{2}$ n'a pas de racine réelle (polynôme du second degré en X^2), on va essayer de trouver deux réels a et b tels que $a > 0$ et $a^2 - 4b < 0$ vérifiant :

$$X^4 + X^2 + \frac{1}{2} = (X^2 - aX + b)(X^2 + aX + b)$$

Par développement puis identification des coefficients des polynômes, on doit avoir

$$\begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 4b < 0 \\ b^2 = \frac{1}{2} \\ 2b - a^2 = 1 \end{cases}$$

ce qui donne $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$.

La factorisation dans $\mathbf{R}[X]$ de $P(X) = X^4 + X^2 + \frac{1}{2}$ est donc :

$$\boxed{X^4 + X^2 + \frac{1}{2} = (X^2 - aX + b)(X^2 + aX + b) \text{ avec } a = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \text{ et } b = \frac{\sqrt{2}}{2}.}$$

5. La fonction $\theta \mapsto \frac{1}{1 + \sin^4(\theta)}$ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, et

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin^4(\theta)} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (1 - \cos^2\theta)^2} \mathrm{d}\theta$$

or $\forall\theta\in[0,\frac{\pi}{2}[$, on sait que $\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}$, alors

$$\frac{1}{1+(1-\cos^2\theta)^2}=\frac{1}{1+\left(1-\dfrac{1}{1+\tan^2\theta}\right)^2}=\frac{(1+\tan^2\theta)^2}{(1+\tan^2\theta)^2+\tan^4\theta}$$

On a donc :

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\tan^2\theta)\frac{1+\tan^2\theta}{2\tan^4\theta+2\tan^2\theta+1}\mathrm{d}\theta$$

On effectue le changement de variable $x=\tan\theta=\varphi(\theta)$ avec φ de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, qui réalise une bijection croissante de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur $[0,+\infty[$ avec $\varphi'(\theta)=1+\tan^2\theta$, donc puisque I converge

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi'(\theta)\frac{1+\varphi^2(\theta)}{2\varphi^4(\theta)+2\varphi^2(\theta)+1}\mathrm{d}\theta=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{2x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{P(x)}\mathrm{d}x$$

avec P polynôme défini dans la question précédente. En notant $a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on peut reprendre la factorisation de $P(x)$ et la question 3. pour écrire :

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda x+\mu}{x^2+ax+b}+\frac{-\lambda x+\mu}{x^2-ax+b}\mathrm{d}x$$

avec $a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda=\dfrac{1-b}{2ab}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}-1}$ et $\mu=\dfrac{1}{2b}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit que $\boxed{\lambda=\dfrac{a}{2}\text{ et }\mu=b}$ d'où

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{ax/2+b}{x^2+ax+b}+\frac{-ax/2+b}{x^2-ax+b}\mathrm{d}x=\frac{a}{8}\int_0^{+\infty}\frac{2x+4b/a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-4b/a}{x^2-ax+b}\mathrm{d}x$$

$$I=\frac{a}{8}\int_0^{+\infty}\frac{2x+a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}+\frac{4b/a-a}{x^2+ax+b}+\frac{4b/a-a}{x^2-ax+b}\mathrm{d}x$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{a}{8}\left((4b/a-a)(G(a,b)+G(-a,b))+\int_0^{+\infty}\frac{2x+a}{x^2+ax+b}-\frac{2x-a}{x^2-ax+b}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{a}{8}\left(\frac{4b-a^2}{a}(G(a,b)+G(-a,b))+\left[\ln\left(\frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b}\right)\right]_0^{+\infty}\right)\\
I &= \frac{4b-a^2}{8}\left(G(a,b)+G(-a,b)\right)=\frac{4b-a^2}{8\sqrt{b}}\left(F(a/2\sqrt{b})+F(-a/2\sqrt{b})\right)
\end{aligned}$$

En reprenant la formule trouvée pour $F(x)$ et en prenant $x=\dfrac{a}{2\sqrt{b}}$ et $x=\dfrac{-a}{2\sqrt{b}}$, on trouve finalement :

$$I=\frac{4b-a^2}{8\sqrt{b}}.\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}\text{ avec }x^2=\frac{a^2}{4b}$$

$$I = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{4}\pi \text{ avec } a = \sqrt{\sqrt{2} - 1} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On obtient donc : $\boxed{I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin^4(\theta)} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}\sqrt{1 + \sqrt{2}}}$