Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel tel que $E \neq \{0\}$ et u désigne un endomorphisme de E.

Réduire l'endomorphisme u, c'est trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est simple : diagonale ou triangulaire

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E, $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(e_i) = \lambda_i e_i.$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* E, $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \iff \forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(e_i) \in Vect(e_1, \dots, e_i).$

Réduire une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est trouver une matrice simple de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (diagonale ou triangulaire) qui soit semblable à A.

1 Eléments propres d'un endomorphisme

1.1 Valeurs propres - vecteurs propres - sous-espaces propres

Proposition 1.1 *Droite stable par un endomorphisme*

Une droite D est stable par $u \iff$ D est engendré par un vecteur a non nul vérifiant $u(a) = \lambda a$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$.

Definition 1.1 *Valeurs propres et vecteurs propres*

- On appelle **valeur propre** de l'endomorphisme u tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ pour lequel il existe un vecteur x de $E \setminus \{0\}$ tel que $\boxed{u(x) = \quad}$
- On appelle **vecteur propre** de u, tout vecteur **non nul** x de E pour lequel il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifiant $\boxed{u(x) = \quad}$

  Dans ce cas λ est valeur propre de u et on dit plus précisément que x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ.

Proposition 1.2 *Caractérisation des valeurs propres*

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

$$\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } u \iff Ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0\} \iff u - \lambda Id_E \text{ non injectif.}}$$

Cas particulier :

$$\boxed{0 \text{ valeur propre de } u \iff Ker(u) \neq \{0\} \iff u \text{ non injectif.}}$$

Definition 1.2 *Sous-espaces propres*

Soit λ une valeur propre de u.
On appelle sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ, l'ensemble, noté en général $E_\lambda(u)$ (ou E_λ), défini par :

$$\boxed{E_\lambda(u) = \{x \in E/ \quad u(x) = \lambda x\} = Ker(u - \lambda Id_E)}$$

$E_\lambda(u)$ est donc constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de u associés à λ.

Proposition 1.3

Soit λ une valeur propre de u.

1. E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. E_λ est stable par u et l'endomorphisme induit par u sur E_λ est l'homothétie de rapport λ sur E_λ (λId_{E_λ}).

Exemple 1.1

1. $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $u : f \in E \mapsto f'$:

2. Projecteur de E : Soit $E = F \oplus G$ avec $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$, et soit p la projection sur F parallèlement à G :

3. Symétrie de E : Soit $E = F \oplus G$ avec $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$, et soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G :

4. $E = \mathbf{C}[X]$ et $u : P \in E \mapsto XP$:

1.2 Valeurs propres et polynômes en u

Proposition 1.4

Soit λ une valeur propre de u.

1. $\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \lambda^k$ est valeur propre de u^k.

2. Si $P \in \mathbf{K}[X]$ et $x \in E$ vérifie $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda).x$.

Proposition 1.5 *Valeur propre et polynôme annulateur*

Soit P un polynôme annulateur de u et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

Si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda) = 0$ (i.e λ est racine de P).

Exemple 1.2

Valeur propre d'un endomorphisme nilpotent :

1.3 Propriétés des sous-espaces propres et vecteurs propres

Proposition 1.6 *Endomorphismes qui commutent*

On suppose que v est un endomorphisme de E qui commute avec u : $u \circ v = v \circ u$.

1. Si λ est une valeur propre de u alors son sous-espace propre associé $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$ est stable par v.

2. $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v.

Proposition 1.7 *Sous-espaces propres en somme directe*

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors la somme $\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Proposition 1.8 *Vecteurs propres et famille libre*

Si $x_1, \ldots, x_p$ sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres **distinctes deux à deux**

alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est une **famille libre**.

1.4 Cas de la dimension finie

Dans ce paragraphe, E est considéré de **dimension finie** égale à $n \in \mathbf{N}^*$.

Definition 1.3

On appelle **spectre** de l'endomorphisme u l'ensemble des valeurs propres de u.
On le note $Sp(u)$.

Proposition 1.9 *Caractérisations*

$$\boxed{\lambda \in Sp(u) \iff u - \lambda Id_E \text{ non inversible} \iff det(u - \lambda Id_E) =}$$

Cas particulier :

$$0 \in Sp(u) \iff u \text{ non inversible} \iff det(u) = \quad \iff rg(u) <$$

$$u \text{ inversible} \iff 0 \notin Sp(u) \iff rg(u) =.$$

Remarque 1.1

Si $\lambda \in Sp(u)$ alors $1 \leqslant dim(E_\lambda(u)) \leqslant n$.

2 Eléments propres d'une matrice carrée

Dans tout ce paragraphe, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Definition 2.1

1. On appelle valeur propre de A, tout scalaire $\lambda \in \mathbf{K}$ pour lequel il existe $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$ telle que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$.

2. On appelle spectre de A l'ensemble des valeurs propres de A. On le note $Sp(A)$.

3. On appelle vecteur propre de A, toute matrice colonne non nulle X pour laquelle il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $AX = \lambda X$.

   λ est alors valeur propre de A et on dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

4. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ l'ensemble, noté $E_\lambda(A)$ (ou E_λ), défini par $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K}), \quad AX = \lambda X\}$, i.e $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$.

Remarque 2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, soit u l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A.

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \lambda \text{ valeur propre de } A.$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ vecteur propre de } u \iff X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ vecteur propre de } A.$$

Proposition 2.1 *Propriétés*

Il découle de l'équivalence précédente les propriétés suivantes :

- $\boxed{\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow Ker(A-\lambda I_n) \neq \{0\} \Longleftrightarrow A-\lambda I_n \text{ non inversible} \Longleftrightarrow det(A-\lambda I_n)=0}$
- A est inversible $\Longleftrightarrow 0 \notin Sp(A)$.
- Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres de A distinctes 2 à 2, alors les sous-espaces $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_p}(A)$ sont en somme directe et $p \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{p} dim(E_{\lambda_k}(A) \leqslant n$.
- Si $P \in \mathbf{K}[X]$ et si $\lambda \in Sp(A)$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de la matrice $P(A)$.
- Si P est un polynôme annulateur de A et si $\lambda \in Sp(A)$ alors λ est racine de P :

  $\boxed{Sp(A) \text{ est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de } A.}$
- $\boxed{\text{Si } \lambda \in Sp(A) \text{ alors } dimE_\lambda(A) = n - rg(A-\lambda I_n).}$

Exemple 2.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de $A - I_n$. Que peut-on en déduire sur les éléments propres de A ?

Remarque 2.2 *Spectre réel et spectre complexe*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors les valeurs propres de A sont des réels : $Sp(A) \subset \mathbf{R}$.

Mais $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et donc A peut être considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et dans ce cas les valeurs propres de A sont des complexes.

On notera $Sp_{\mathbf{C}}(A)$ le spectre de A considérée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $Sp(A)$ ou $Sp_{\mathbf{R}}(A)$ le spectre de A élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3 Polynôme caractéristique

3.1 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Remarque 3.1

Soit $x \in \mathbf{R}$ et $M(x) = (m_{ij}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont les coefficients sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 en x : $m_{ij} = a_{ij}x + b_{ij}$.

La fonction $x \mapsto det(M(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à n.

Definition 3.1 *Polynôme caractéristique d'une matrice*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et I_n est la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

On appelle **polynôme caractéristique** de A, le polynôme, noté χ_A, défini par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{K}, \quad \chi_A(x) = det(xI_n - A) = (-1)^n det(A - xI_n)}$$

Remarque 3.2 *Valeurs propres et polynôme caractéristique*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

$$\boxed{\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \lambda \text{ est racine de } \chi_A.}$$

Les valeurs propres de A sont donc exactement les racines de son polynôme caractéristique.

On en déduit que $\boxed{\text{si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \text{ alors } A \text{ admet au plus } n \text{ valeurs propres distinctes.}}$

Exemple 3.1

1. Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire, ou si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & (0) \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_{nn} \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale alors $\boxed{\chi_A(X) = \qquad\qquad .}$

   Les valeurs propres d'une matrice triangulaire ou diagonale sont donc ses coefficients diagonaux.

2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\chi_A = X^2 - Tr(A)X + det(A)$.

3. Déterminer le polynôme caractéristique de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 3.1 *Expression du polynôme caractéristique*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

χ_A est un polynôme unitaire de degré n et :

$$\boxed{\chi_A(X) = X^n - Tr(A)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n det(A)}$$

Lorsque χ_A est *scindé* sur $\mathbf{K}$ (*notamment si* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$) il s'écrit $\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ et on a :

$$\boxed{Tr(A) = \qquad\qquad\qquad\qquad det(A) = \qquad\qquad}$$

Proposition 3.2 *Matrices semblables- matrice transposée et polynôme caractéristique*

On considère A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

2. A et A^T ont même polynôme caractéristique.

3.2 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie

E désigne un espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbf{N}^*$ et u est un endomorphisme de E et A est sa matrice dans une base fixée de E.

Definition 3.2

On appelle **polynôme caractéristique** de u le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de E. On le note χ_u :

$$\forall x \in \mathbf{K}, \quad \chi_u(x) = det(xId_E - u)$$

Proposition 3.3 *Endomorphisme induit*

Soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u.

Si on note $\bar{u}$ l'endomorphisme de F induit par u, alors $\boxed{\chi_{\bar{u}} \text{ divise } \chi_u.}$

Remarque 3.3

- χ_u est un polynôme de degré n et unitaire : $\boxed{\chi_u(X) = X^n - Tr(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n det(u)}$

- Les valeurs propres de u sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.

Definition 3.3 *Ordre de multiplicité d'une valeur propre*

Soit λ une valeur propre de u (resp. de A).

On appelle multiplicité de la valeur propre λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u (resp. χ_A).

Proposition 3.4 *Multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre*

Soit λ une valeur propre de u (resp. de A).

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est de multiplicité } p \text{ alors } 1 \leqslant dimE_\lambda(u) \leqslant p.}$$

En particulier : Si λ est valeur propre simple de u (resp. de A) alors $dimE_\lambda(u) = 1$.

Proposition 3.5 **Théorème de Cayley-Hamilton**

1. χ_A, le polynôme caractéristique de A, est un polynôme annulateur de A : $\boxed{\chi_A(A) = O_n}$

2. χ_u, le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u : $\boxed{\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}}$

4 Caractérisation de la diagonalisation

Dans ce paragraphe E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \in \mathbf{N}^*$, u désigne un endomorphisme de E et A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Definition 4.1

1. L'endomorphisme u est dit **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

2. La matrice A est dite **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale.

Proposition 4.1 *Caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable*

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres **distinctes deux à deux** de u.
L' endomorphisme u de E est **diagonalisable si, et seulement si**, l'une des propriétés ci-dessous est vérifiée :

- $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} Ker(u - \lambda_i Id_E)$.
- $dim(E) = \sum_{i=1}^{n} dimE_{\lambda_i}(u)$.
- χ_u est scindé dans $\mathbf{K}(X]$ et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\quad dimE_\lambda(u) = n_\lambda$ avec n_λ la multiplicité de la valeur propre λ (i.e $dimE_\lambda(u)$ est maximale)
- $\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ est un polynôme annulateur de u.
- u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Remarque 4.1 **Cas particulier**

Si le polynôme caractéristique χ_u de u est **scindé à racines simples** alors u est diagonalisable.

Ce qui revient à dire que u admet n valeurs propres distinctes, que chaque valeur propre est simple et chaque sous-espace propre est une droite.

Remarque 4.2

Soit F un sous-espace vectoriel stable par l'endomorphisme u.

Si u est diagonalisable alors $\bar{u}$ l'endomorphisme de F induit par u est aussi diagonalisable.

Proposition 4.2 *Caractérisations d'une matrice diagonalisable*

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- A est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$.
- A est diagonalisable si et seulement si $n = \sum_{\lambda \in Sp(A)} dim(E_\lambda(A)$.
- A est diagonalisable si et seulement si χ_A est scindé et $\forall \lambda \in Sp(A), \quad dim E_\lambda(A) = n_\lambda$ avec n_λ la multiplicité de λ valeur propre.
- A est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de A.
- A est diagonalisable si et seulement si A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Remarque 4.3

1. Si A est diagonalisable alors χ_A est scindé dans $\mathbf{K}[X]$ (*Condition nécessaire*).
2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ possède n valeurs propres distinctes (*Condition suffisante)*, alors A est diagonalisable.
3. Si A est une **matrice symétrique réelle** alors A est diagonalisable.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ admettant une valeur propre λ de multiplicité n.
   A est diagonalisable si et seulement si $A = \lambda I_n$.

Étude pratique de la diagonalisation d'une matrice

Pour A donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

1. **Si on connait R un polynôme annulateur de A**
   Si ce polynôme R est scindé à racines simples, c'est terminé.
   Sinon on factorise R au maximum et on regarde si le polynôme $(X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ racines distinctes de R est aussi annulateur de A.
2. **Si on ne connait pas de polynôme annulateur de A :**
   On calcule le polynôme caractéristique de A et on cherche ses racines.
   - Si χ_A n'est pas scindé dans $\mathbf{K}[X]$ alors c'est terminé car A n'est pas diagonalisable.
   - Si χ_A est scindé à racines simples alors c'est terminé, on sait que A est diagonalisable.

- Si χ_A est scindé mais pas à racines simples, on peut regarder si $(X-\lambda_1)\dots(X-\lambda_p)$ est annulateur de A avec $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les racines distinctes de χ_A.

  Ou bien on cherche la dimension des sous-espaces propres avec le théorème du rang (on cherche donc $rg(A-\lambda_i I_n)$ ou en déterminant une base de $Ker(A-\lambda_i I_n)$ pour chaque valeur propre λ_i de A : on résout le système $AX=\lambda_i X$ (on ne doit pas trouver $X=0$). On regarde ensuite si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

3. **Lorsque A est diagonalisable**

   Pour trouver $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres (non distinctes) de A. On cherche une base de chacun des sous-espaces propres. On recolle les différentes bases des sous-espaces propres et on obtient une base de vecteurs propres, ces vecteurs colonnes forment la matrice P, qui est une matrice de passage d'une base à une autre.

Exemple 4.1

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $A^3 = I_n$. A est-elle diagonalisable ?
   Même question mais avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 28 \\ 6 & -8 & 24 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, si cela est possible.

5 Deux exemples d'application de la diagonalisation

5.1 Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable

On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable.

On diagonalise A : il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ (*formée en colonnes par une base de vecteurs propres de* A) et $D \in D_n(\mathbf{K})$ (*matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de* A *comptées avec leur multiplicité*) telles que $A = P.D.P^{-1}$.

Alors, on montre par récurrence que $\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad A^k = P.D^k.P^{-1}.}$

Rappel : on peut aussi effectuer la division euclidienne de X^k *par un polynôme annulateur de* A*, notamment* $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)$ *où* $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ *sont les valeurs propres distinctes de* A.

5.2 Résolution d'un système différentiel

Si on cherche à trouver les fonctions x, y, z dérivables de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 4y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t) - 4z(t) \\ z'(t) = 3x(t) - 3y(t) + z(t) \end{cases}$$

On peut écrire le système sous forme matricielle : $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, alors il existe P inversible de $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ telles que $A = P.D.P^{-1}$ et le système initial devient $\begin{cases} a'(t) = \lambda_1 a(t) \\ b'(t) = \lambda_2 b(t) \\ c'(t) = \lambda_3 c(t) \end{cases}$ où $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P. \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix}$.

Résoudre le système donné initialement.

6 Trigonalisation

E désigne toujours un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbf{N}^*$, u désigne un endomorphisme de E et A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Definition 6.1 *Endomorphisme trigonalisable*

On dit que u est trigonalisable lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Ainsi u est trigonalisable si et seulement si il existe $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, ce qui revient aussi à $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(e_i) \in Vect(e_1, \ldots, e_i)$.

Dans ce cas $\chi_u = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_n)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u comptées avec leur multiplicité.

Definition 6.2 *Matrice trigonalisable*

On dit que A est trigonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

$$A \text{ est trigonalisable} \iff \exists P \in GL_n(\mathbf{K}) \text{ et } \exists T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in T_n^+(\mathbf{K}) / \quad T = P^{-1}.A.P,$$

i.e $A = P.T.P^{-1}$.

Dans ce cas $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité.

Proposition 6.1 *CNS de trigonalisabilité*

1. L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbf{K}$.

2. La matrice A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps $\mathbf{K}$.

C'est particulièrement le cas lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

Exemple 6.1

1. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ est trigonalisable mais n'est pas diagonalisable.

   Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -10 & -2 & 7 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ mais pas diagonalisable.

   Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.