Exercice 1

1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X]n & \to & \mathbf{R}[X] \\ P & \mapsto & XP-(X-1)^2P' \end{array}$
   Déterminer les éléments propres de f.
2. Soit $v : P \in \mathbf{R}_n[X] \mapsto XP' + P(1)$.
   Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme v.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.
A quelle condition nécessaire et suffisante la somme de deux vecteurs propres de f est-elle encore un vecteur propre de f ?

Exercice 3

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Soit u un automorphisme de E, on définit l'application $g = u \circ f \circ u^{-1}$.

1. Montrer que f et g ont les mêmes valeurs propres.
2. Exprimer les sous-espaces propres de g en fonction de ceux de f.

Exercice 4

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E tels que $v \circ u - u \circ v = u$ avec $u \neq 0$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad v \circ u^k - u^k \circ v = ku^k$.
2. En déduire que u est nilpotent.
   On pourra considérer l'application $\varphi : \omega \in \mathcal{L}(E) \mapsto v \circ \omega - \omega \circ v$.

Exercice 5

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\rho_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.

1. On rappelle la définition d'un disque fermé dans le plan complexe : pour $a \in \mathbf{C}$ et $r \geqslant 0$, on note $\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbf{C}, \quad |z - a| \leqslant r\}$.
   Montrer que $Sp(A)$ est inclus dans $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \overline{D}(a_{ii}, \rho_i)$.
2. *Applications,* montrer les propriétés suivantes :
   • Si A est à diagonale strictement dominante, i.e. $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{ii}| > \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, alors A est inversible.

   • Si A est stochastique, i.e. $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{ij} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$, alors 1 est valeur propre de A et toute valeur propre de A est de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 6

Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère les matrices A et L de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A.
2. Déterminer le spectre de A.
3. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2.
4. A et L sont-elles semblables ?
5. Discuter des conditions pour que deux matrices de rang 1 soient semblables.

Exercice 7

Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbf{K}^* \quad \chi_{A^{-1}}(\lambda) = \dfrac{(-\lambda)^n}{det(A)} \chi_A\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$.
2. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $\dfrac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} avec le même ordre de multiplicité.

Exercice 8

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que $det(A) > 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $tr(A) \in \mathbf{Z}^-$.

Exercice 9

Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 10

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $a_{ii} = 4$ et $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 1$.

1. Justifier que A est diagonalisable.
2. $A - 3I_n$ est-elle inversible ?
3. Déterminer les éléments propres de A.

Exercice 11

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on explicitera.
2. Montrer que toute matrice commutant avec D est une matrice diagonale.

3. Soit $Q = X^7 + X + 1$. Déterminer toutes les matrices M telles que $Q(M) = A$.

Exercice 12

Caractérisez toutes les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbf{R})$ qui vérifient $M^3 - 4M = 0$ et $tr(M) = 0$.

Exercice 13

1. Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Soit $(\ e_1, e_2, \dots, e_{2p}\ )$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2p}$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2p}$ dont la matrice dans cette base est A définie par :

$$A_{i,2p+1-i} = \alpha_i \qquad \text{et} \qquad A_{i,j} = 0 \text{ pour } j \neq 2p+1-i.$$

   (a) Représenter la matrice A.
   (b) Montrer que le sous-espace $E_i = \text{Vect}\,(e_i, e_{2p+1-i})$ est stable par f.
   (c) Montrer que f_i, l'endomorphisme induit par f sur E_i, est diagonalisable si et seulement si f est diagonalisable.
   (d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
   (e) Et si A est de d'ordre impair ?

Exercice 14

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Que peut-on dire de $\det(A)$ s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$?
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a & 2 & 1+a \\ 3-a & 3 & 3-a \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculer $\det(A)$. En déduire une condition pour qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $B^2 = A$.
3. Désormais $a \geqslant 0$. Déterminer les éléments propres de A puis donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
4. Désormais $a \neq 1$ et $a \neq 3$. Montrer que si M est telle que $M^2 = D$ alors $MD = DM$. Déterminer les matrices M telles que $M^2 = D$. En déduire les matrices B telles que $B^2 = A$.

Exercice 15

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de A.
2. Écrire le polynôme caractéristique χ_B de B en fonction de celui de A. En déduire les valeurs propres de B.
3. Déterminer les sous-espaces propres de B sans résoudre de système.

Exercice 16

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel.

1. On suppose que u est diagonalisable. Montrer que u^2 est diagonalisable.

2. Montrer que la réciproque est fausse en donnant un contre-exemple.
3. Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Montrer que :
$$\ker\left(u^2 - \lambda^2 I\right) = \ker(u - \lambda I) \oplus \ker(u + \lambda I)$$
4. Montrer que si u est bijectif, alors la réciproque de la question 1 est vraie, c'est-à-dire :
$$u^2 \text{ est diagonalisable } \Rightarrow u \text{ est diagonalisable.}$$
5. Montrer que si u est diagonalisable, alors pour tout polynôme Q, $Q(u)$ est diagonalisable.
6. Soient $v \in \mathcal{L}(E), \lambda \in Sp(v)$ et P un polynôme annulateur de v. On suppose que $P'(v)$ est bijectif. Montrer que λ est racine simple de P.
7. On suppose qu'il existe Q dans $\mathbf{C}[X]$ tel que $Q(u)$ est diagonalisable et $Q'(u)$ est bijectif. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} = -2u_n + u_{n+1} + 2u_{n+2}$. En transformant ce problème sous forme matricielle, exprimer u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbf{N}$.

Exercice 18

On cherche à résoudre le système différentiel linéaire $(S)\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x + 2y - 2z \\ y' & = & -4x - 3y + 4z \\ z' & = & -2x + z \end{array}\right.$ où x, y, z sont trois fonctions inconnues de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

1. Définir une matrice A telle que $(S) \Longleftrightarrow X' = AX$.
2. Prouver que la matrice A n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer une matrice P inversible telle que $A = P.T.P^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. On pose $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = P^{-1}X$, justifier rapidement que $Y' = \left(a' \_ b' \_ c'\right)$ et montrer que $X' = AX \Longleftrightarrow Y' = TY$.
5. En déduire que si X est solution de $X' = AX$ alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\left\{\begin{array}{l} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)e^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^t \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2)e^{-t} + \lambda_3 e^t \end{array}\right.$
6. En déduire une solution non stationnaire qui converge vers l'unique état d'équilibre du système (S).