

Exercice : Somme de deux projecteurs qui commutent

On considère un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie, on note Id l'endomorphisme identité de E , et on se propose d'étudier l'endomorphisme $f = p + q$ où p et q sont deux projecteurs de E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient : $p \circ q = q \circ p$.

Etude des valeurs propres de $f = p + q$

1. Trouver un polynôme annulateur de $f = p + q$ de degré 3.
2. En déduire les valeurs propres possibles de l'endomorphisme $f = p + q$.

Etude des sous-espaces propres de $f = p + q$

3. Démontrer l'égalité : $Ker(p + q) = Ker(p) \cap Ker(q)$.
En déduire l'égalité $Ker(p + q - 2Id) = Im(p) \cap Im(q)$.
4. A quelles conditions portant sur les sous-espaces $Ker(p)$, $Ker(q)$, $Im(p)$ et $Im(q)$ chacun des réels 0 et 2 est-il valeur propre de $f = p + q$?
Préciser dans ce cas les sous-espaces propres associés à chacune de ces valeurs propres 0 et 2.
5. Montrer l'égalité : $Im(p + q - 2p \circ q) = Im(2f - f^2) = Ker(Id - f)$.
6. Calculer $(Id - 2p)^2$ et $(Id - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q)$.
En déduire que 1 est valeur propre de $f = p + q$ si, et seulement si $p \neq q$.

Réduction de l'endomorphisme $f = p + q$

7. Établir que $E = Ker(f) \oplus Ker(f - Id) \oplus Ker(f - 2Id)$.
8. Justifier que $f = p + q$ est diagonalisable, et préciser les projecteurs π_0, π_1 et π_2 associant à tout vecteur x de E ses projections sur les sous-espaces $Ker(f)$, $Ker(f - Id)$, $Ker(f - 2Id)$ dans la direction de la somme des deux autres.

Problème : Sous-espaces stables

$\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$ et E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

Si f est un endomorphisme de E , pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f , c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F .

Pour tout endomorphisme f de E on définit la suite $(f^k)_{k \in \mathbf{N}}$ des puissances de f par : $f^0 = Id_E$ et $f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Première partie :

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E .

9. Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur $\mathbf{y}$ de E est stable par f si et seulement si $\mathbf{y}$ est un vecteur propre de f .
10. (a) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.
- (b) Montrer que si E est de dimension finie $n \geq 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.

Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ qui n'admet que trois sous-espaces stables.

11. (a) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f .
Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre.
- (b) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f .
- (c) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?
12. Dans cette question, E est un espace de dimension finie.
 - (a) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f .
On pourra partir d'une base de F .
 - (b) Montrer que si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f , alors f est diagonalisable.
Qu'en est-il lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{R}$?

Deuxième partie :

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E de dimension n , qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i .

13. Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si

$$F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i).$$

- (a) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ est stable par f .

- (b) Soit F un sous-espace de E stable par f et un vecteur x non nul de F .

Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

- (c) Si on note $H_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = \llbracket 1, r \rrbracket$ avec $1 \leq r \leq p$. Anisi on a : $x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$.
On note $V_x = Vect(x_1, \dots, x_r)$.
Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x .

- (d) Montrer que pour tout j de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$.

- (e) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x .

- (f) En déduire que pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, x_i appartient à F et conclure.

14. Dans cette question, on se place dans le cas $p = n$.

- (a) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

- (b) Combien y a-t-il de droites stables par f ?

- (c) Si $n \geq 3$ et $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k stables par f ?

- (d) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

- (e) On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Donner tous les sous-espaces de } \mathbf{R}^3 \text{ stables par } f.$$

Fin de l'énoncé