

Problème : Extrait de PT 2022 Maths C**Préliminaire**

1. Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\tan^2 t} &= 1 + \frac{\cos^2(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{\sin^2(t) + \cos^2(t)}{\sin^2(t)} \end{aligned}$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1}{\sin^2(t)}$$

Partie I

2. Pour tout réel x , on pose :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+t^2} dt$$

- (a) Pour tout réel x , la fonction $f_x : t \mapsto \frac{1}{1+x^2+t^2}$ est continue sur $\mathbf{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction polynômiale qui ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.

Par définition l'intégrale $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+t^2} dt$ converge si, et seulement si les intégrales $\int_0^{+\infty} f_x(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 f_x(t) dt$ convergent. Or f_x est paire donc les intégrales $\int_0^{+\infty} f_x(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 f_x(t) dt$ sont de même nature (changement de variable $t = -u$).

$$f_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

D'après les intégrales de Riemann on sait que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ ($2 > 1$), alors par comparaison la fonction f_x est aussi intégrable en $+\infty$ et finalement f_x est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On a bien l'intégrale $F(x)$ converge pour tout réel x .

- (b) $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan(t)]_{-\infty}^{+\infty}$, or $\lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{-\infty} \arctan = -\frac{\pi}{2}$, donc

$$F(0) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(c)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left[\arctan \left(\frac{t}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\
F(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

3. Soit α un réel positif. Pour tout entier naturel non nul n , on pose :

$$u_n = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}}, \quad I_n = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}, \quad J_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$$

(a) • Si $\alpha = 0$ alors $u_n = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

• Pour $\alpha > 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $u_n > 0$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$.

D'après les séries de Riemann et par comparaison pour des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si $\frac{\alpha}{2} > 1$.

Ce qui donne, pour $\alpha \geq 0$:

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si } \alpha > 2.$$

(b) Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}$ et $t \mapsto \frac{1}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}$ sont continues sur $\mathbf{R}$, alors par intégration sur un segment I_n et J_n existent pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

De plus, pour $\alpha \geq 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est croissante sur $]0, +\infty[$, donc

$$\forall t \in [n\pi, (n+1)\pi] \quad n^\alpha \pi^\alpha \leq t^\alpha \leq (n+1)^\alpha \pi^\alpha$$

$\sin^2(t) \geq 0$, donc $0 < 1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t) \leq 1 + t^\alpha \sin^2(t) \leq 1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)$ et par passage à l'inverse et intégration sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$, il vient :

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} dt \leq J_n \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} dt \quad (*)$$

1ère méthode :

Par le changement de variable affine $t = n\pi + u$, on obtient :

$$\int_0^\pi \frac{1}{1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2(n\pi + u)} du \leq J_n \leq \int_0^\pi \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(n\pi + u)} du$$

$\forall u \in [0, \pi] \quad \sin^2(n\pi + u) = ((-1)^n \sin(u))^2 = \sin^2(u)$, alors on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad I_{n+1} \leq J_n \leq I_n}$$

2nde méthode :

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ et π -

périodique alors $\forall a \in \mathbf{R}^+ \quad \int_0^\pi f_n(t) dt = \int_a^{a+\pi} f(t) dt$, donc

$I_n = \int_0^\pi \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} dt = \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} dt$. L'encadrement (*) devient alors $I_{n+1} \leq J_n \leq I_n$.

(c) On peut écrire $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)} dt$

1ère méthode : changement de variable $u = \frac{1}{\tan(t)}$

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\tan(t)}$ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ avec

$$\varphi'(t) = -\frac{1 + \tan^2(t)}{\tan^2(t)} = -\left(1 + \frac{1}{\tan^2(t)}\right) = -\frac{1}{\sin^2(t)} < 0$$

Donc φ réalise une bijection décroissante de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $]0, +\infty[$ et une bijection décroissante de $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ sur $] -\infty, 0[$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2(t)} + n^\alpha \pi^\alpha} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\varphi'(t) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2(t)} + n^\alpha \pi^\alpha} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\varphi'(t) \cdot \frac{1}{1 + \varphi^2(t) + n^\alpha \pi^\alpha} dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\varphi'(t) \cdot \frac{1}{1 + \varphi^2(t) + n^\alpha \pi^\alpha} dt \\ I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\varphi'(t) f(\varphi(t)) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi -\varphi'(t) f(\varphi(t)) dt \end{aligned}$$

avec $f : u \mapsto \frac{1}{1 + u^2 + n^\alpha \pi^\alpha}$ qui est continue sur $\mathbf{R}$, alors par le changement de variable $u = \varphi(t)$, puisque I_n converge on a :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u) du + \int_{-\infty}^0 f(u) du$$

Ce qui donne :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha + u^2} du = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Variante de la 1ère méthode : toujours le changement de variable $u = \frac{1}{\tan(t)}$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\tan(t)}$ est de classe C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ avec

$$\varphi'(t) = -\frac{1 + \tan^2(t)}{\tan^2(t)} = -\left(1 + \frac{1}{\tan^2(t)}\right) = -\frac{1}{\sin^2(t)} < 0$$

On remarque que $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varphi(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \varphi(t)$, donc φ se prolonge en une fonction $\bar{\varphi}$ continue sur $]0, \pi[$.

On remarque aussi que $\varphi'(t) = -\frac{1}{\sin^2(t)}$ admet une limite finie en $\frac{\pi}{2}$, alors le prolongement $\bar{\varphi}$ est de classe C^1 sur $]0, \pi[$ et réalise une bijection décroissante de $]0, \pi[$ sur $] -\infty, +\infty[$.

Puisque I_n converge, on a :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi -\bar{\varphi}'(t) \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin^2(t)} + n^\alpha \pi^\alpha} dt \\ &= \int_0^\pi -\bar{\varphi}'(t) \cdot \frac{1}{1 + \bar{\varphi}^2(t) + n^\alpha \pi^\alpha} dt \\ I_n &= \int_0^\pi -\bar{\varphi}'(t) f(\bar{\varphi}(t)) dt \end{aligned}$$

avec $f : u \mapsto \frac{1}{1 + u^2 + n^\alpha \pi^\alpha}$ qui est continue sur $\mathbf{R}$, alors par le changement de variable $u = \bar{\varphi}(t)$, puisque I_n converge on a :

$$I_n = \int_0^\pi -\bar{\varphi}'(t) f(\bar{\varphi}(t)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du$$

Ce qui donne :

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha + u^2} du = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

2nde méthode : changement de variable $t = \arctan\left(\frac{1}{u}\right)$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $f_n : t \mapsto \frac{1}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(t)}$ est continue et π -périodique sur $\mathbf{R}$,

alors $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f_n(t) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f_n(t) dt$, donc $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t) dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f_n(t) dt$.

On effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$ avec $\varphi : u \mapsto \arctan\left(\frac{1}{u}\right)$, qui est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$ avec $\varphi'(u) = -\frac{1}{u^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{-1}{1 + u^2} < 0$, donc φ est une bijection

décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et de $] -\infty, 0[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, alors puisque I_n converge :

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{+\infty} \varphi'(u) f_n(\varphi(u)) du - \int_{-\infty}^0 \varphi'(u) f_n(\varphi(u)) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \times \frac{1}{1+n^\alpha \pi^\alpha \sin^2(\varphi(u))} du \end{aligned}$$

par le préliminaire $\sin^2(\varphi(u)) = \frac{\tan^2(\varphi(u))}{1+\tan^2(\varphi(u))} = \frac{1}{1+u^2}$

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \times \frac{1+u^2}{1+u^2+n^\alpha \pi^\alpha} du$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+n^\alpha \pi^\alpha + u^2} du$$

On retrouve bien

$$I_n = F\left(n^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

(d) On a vu que pour x réel $F(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$, alors par (c) on a : $I_n = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^\alpha \pi^\alpha}}$ et par

(b) on obtient :

$$u_{n+1} \leq J_n \leq u_n.$$

(e) • La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1+t^\alpha \sin^2(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas sur $]0, +\infty[$ et strictement positive. De plus g est prolongeable par continuité en 0 puisque $\alpha \geq 0$. On peut donc écrire

$$\int_0^{(N+1)\pi} g(t) dt = \int_0^\pi g(t) dt + \sum_{n=1}^N J_n$$

et la fonction $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ étant croissante (g est positive) on sait qu'elle admet une limite L en $+\infty$ qui est finie ou égale à $+\infty$.

Par caractérisation séquentielle $L = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{(N+1)\pi} g(t) dt = \int_0^\pi g(t) dt + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N J_n$.

• Les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{n+1}$ sont toujours de même nature.

D'après le résultat de la question (d), on a : $0 \leq u_{n+1} \leq J_n \leq u_n$ donc par double comparaison pour des séries à termes positifs, la série $\sum J_n$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. Par le résultat de la question (a), on sait que $\sum u_n$ converge si, et seulement si $\alpha > 2$.

On en déduit que

$$\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2 t} \text{ converge si, et seulement si } \alpha > 2.$$

Partie II

4. Pour tout entier naturel non nul, n , on pose : $H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$.

- (a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $f_n : u \mapsto \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus $f_n(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2n}}$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $2n \geq 2 > 1$, donc la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^{2n}}$ est intégrable en $+\infty$ et par comparaison f_n est aussi intégrable en $+\infty$.

Finalement f_n étant intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n converge.

(b)

$$\int_0^1 u^{2n} du = \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 u^{2n} du = 0.$$

- (c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $u \in [1, +\infty[$ $0 \leq \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leq \frac{u^{2n}}{u^{4n}}$, alors par intégration sur $[1, +\infty[$ puisque les intégrales convergent on obtient :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}} du$$

$$\text{Or } \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{2n}} du = \left[\frac{u^{1-2n}}{1-2n} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{2n-1}, \text{ donc}$$

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du \leq \frac{1}{2n-1}$$

$$\text{Et par encadrement } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du = 0.$$

- (d) Par relation de Chasles, $H_n = \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du$.

$\forall u \in [0, 1]$ $0 \leq \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \leq u^{2n}$, alors par intégration sur le segment $[0, 1]$, on a :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du \leq \int_0^1 u^{2n} du \text{ et par encadrement } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du = 0.$$

Alors par somme de limites finies, $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = 0$.

5. Pour tout entier naturel non nul n , et tout réel strictement positif x , on rappelle la notation : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

On pose :

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[n]{\tan x} \, dx, \quad , \quad L_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[n]{\tan x} \, dx$$

- (a) • La fonction tangente est continue et positive sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$ la fonction $t \mapsto \sqrt[n]{t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, comme réciproque de $\begin{matrix} [0, +\infty[& \rightarrow & [0, +\infty[\\ t & \mapsto & t^{2n} \end{matrix}$, donc l'intégrale K_n converge.

Remarque : si on écrit $\sqrt[n]{\tan(x)} = (\tan x)^{\frac{1}{n}}$, on a la continuité de $x \mapsto \sqrt[n]{\tan(x)}$ sur $]0, \frac{\pi}{4}]$ et cette fonction est prolongeable par continuité en 0, donc K_n est faussement impropre en 0.

- La fonction tangente est continue et strictement positive sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $x \mapsto \sqrt[n]{\tan(x)}$ est continue sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

1ère méthode :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\cos(x)}, \text{ or } \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ et } \sin(u) \underset{0}{\sim} u, \text{ alors}$$

$$\tan(x) \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \text{ et } \sqrt[n]{\tan(x)} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{1}{n}}}$$

Puisque $\frac{1}{2n} < 1$, on sait d'après les intégrales de Riemann généralisées que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{1}{2n}}}$ est intégrable en $\frac{\pi}{2}$ et donc la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{\tan(x)}$ est intégrable sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2nde méthode :

Avec le changement de variable affine $x = \frac{\pi}{2} - t$, l'intégrale L_n est de même nature que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[n]{\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[n]{\frac{\cos(t)}{\sin(t)}} dt$.
La fonction $t \mapsto \sqrt[n]{\frac{\cos(t)}{\sin(t)}}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ avec $\sqrt[n]{\frac{\cos(t)}{\sin(t)}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt[n]{t}}$, or $\frac{1}{2n} < 1$ puisque $n \in \mathbf{N}^*$, donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{t}}$ est intégrable en 0 et par comparaison la fonction $t \mapsto \sqrt[n]{\frac{\cos(t)}{\sin(t)}}$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. On en déduit que l'intégrale L_n converge.

Les intégrales K_n et L_n convergent pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

- (b) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2n}$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad \tan(x) \in [0, 1]$, donc

$$(\tan(x))^{\frac{1}{2n}} \leq (\tan(x))^{\frac{1}{2(n+1)}} \leq 1$$

et par intégration sur le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$, $K_n \leq K_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}$.

La suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée.

- (c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2n}$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \quad \tan(x) \geq 1$ alors

$$\sqrt[2(n+1)]{\tan(x)} \leq \sqrt[2n]{\tan(x)}$$

et par intégration sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, on obtient, puisque les intégrales convergent, $L_{n+1} \leq L_n$.

La suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante.

- (d) $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \quad \tan(x) \geq 1$, alors $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \quad \sqrt[2n]{\tan(x)} \geq 1$ et par intégration sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, $L_n \geq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan x} \, dx \geq \frac{\pi}{4}$$

- (e) La suite (L_n) est décroissante et minorée par $\frac{\pi}{4}$, donc elle converge avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n \geq \frac{\pi}{4}$.

La suite (K_n) est croissante et majorée, donc elle converge, de plus $K_n \geq 0$, alors sa limite est aussi positive et finalement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$$

6. (a) Pour tout entier naturel non nul n , $K_n + L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[2n]{\tan(x)} \, dx$.

La fonction $\varphi : u \mapsto \arctan(u^{2n})$ est une bijection croissante de classe C^1 de $[0, +\infty[$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec $\varphi'(u) = \frac{2nu^{2n-1}}{1+u^{4n}}$, alors le changement de variable $x = \varphi(u)$ dans l'intégrale $K_n + L_n$ donne :

$$K_n + L_n = \int_0^{+\infty} \varphi'(u) \sqrt[2n]{\tan(\varphi(u))} \, du = \int_0^{+\infty} \frac{2nu^{2n-1}}{1+u^{4n}} u \, du$$

On a donc $K_n + L_n = 2n \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} \, du$.

(b) On en déduit que $H_n = \frac{K_n + L_n}{2n}$.

La suite $(K_n + L_n)$ converge vers un réel strictement positif par le résultat de (e), il

existe donc une constante $H > 0$ telle que $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{H}{n}$.

Exercice 1 : Extrait de Mines-Ponts 2007 PSI

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$, une matrice $A' \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$AA' = A'A \quad (1)$$

$$A = AA'A \quad (2)$$

$$A' = A'AA' \quad (3)$$

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé.

7. On suppose que A admet un pseudo-inverse A' . On note a' l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A' .

• On sait que l'on a toujours $Im(a^2) \subset Im(a)$:

$\forall y \in Im(a^2), \exists x \in \mathbf{R}^n, y = a^2(x) = a(a(x))$ donc $y \in Im(a)$.

• D'après $AA' = A'A$ et $A = AA'A$, on peut écrire $A = A^2A'$, ce qui donne $a = a^2 \circ a'$.

Soit $y \in Im(a)$, il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $y = a(x) = a^2(a'(x))$ donc $Im(a) \subset Im(a^2)$.

Par double inclusion on a obtenu $Im(a) = Im(a^2)$ et donc $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$.

Inversement on suppose maintenant que $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$. On note r cet entier.

8. • Puisque $\text{rang}(a) = \text{rang}(a^2)$, le théorème du rang appliqué à a et à a^2 donne $\dim Ker(a) = \dim Ker(a^2)$, or on a toujours $Ker(a) \subset Ker(a^2)$, donc $Ker(a) = Ker(a^2)$.

Soit $y \in Im(a) \cap Ker(a)$, il existe $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $y = a(x)$ et $0 = a(y) = a^2(x)$, donc $x \in Ker(a^2)$ et finalement $x \in Ker(a)$ donc $y = a(x) = 0$.

On a donc $Im(a) \cap Ker(a) = \{0\}$: l'image et le noyau de a sont en somme directe.

• On a $Im(a) \cap Ker(a) = \{0\}$ et $\dim \mathbf{R}^n = \dim Im(a) + \dim Ker(a)$ donc $\mathbf{R}^n = Im(a) \oplus Ker(a)$.

9. On sait que $Im(a)$ et $Ker(a)$ sont des sous-espaces vectoriels stables par a , donc dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à $\mathbf{R}^n = Im(a) \oplus Ker(a)$ la matrice de a est diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbf{R})$ ($r = \dim Im(a)$).

1ère méthode pour B inversible :

B est la matrice de l'endomorphisme u induit par a sur $Im(a)$: $u : \begin{matrix} Im(a) & \rightarrow & Im(a) \\ x & \mapsto & a(x) \end{matrix}$.
Alors $Ker(u) = Im(a) \cap Ker(a) = \{0\}$. u est donc bijectif et sa matrice B est inversible.

2nde méthode pour B inversible :

Par hypothèse $\text{rang}(a) = r$, alors $r = \text{rang} \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} = \text{rang}(B)$ (puisque les colonnes $r+1$ à n sont toutes nulles). B est une matrice carrée d'ordre r de rang égal à r donc B est inversible.

Par formule de changement de bases, en notant W la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on sait que $W \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ est inversible et

$$A = W \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1}$$

10. Posons $A' = W \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdot W^{-1}$, on a par produit de matrices par blocs compatibles :

$$AA' = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1} \cdot W \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} = W \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} = W \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1}$$

De même $A'A = W \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} \cdot W \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} = W \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1}$, donc

$$AA' = A'A$$

On a aussi

$$AA'A = W \cdot \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} \cdot W \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} = W \begin{pmatrix} I_r \cdot B & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} = A$$

$$A' \cdot A \cdot A' = W \cdot \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} \cdot W \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} = W \begin{pmatrix} I_r \cdot B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1} = A'$$

La matrice $A' = W \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1}$ est donc un pseudo-inverse de A .

Considérons un pseudo-inverse quelconque A' de A et a' l'endomorphisme canoniquement associé à A' .

11. D'après $AA' = A'A$, on a $a \circ a' = a' \circ a$, donc a et a' commutent, on sait alors que $Im(a)$ et $Ker(a)$ sont stables par a' .

Si on le redémontre : si $x \in \text{Ker}(a)$ alors $a(a'(x)) = a'(a(x)) = a'(0) = 0$ donc $a'(x) \in \text{Ker}(a)$.

Si $x \in \text{Im}(a)$ alors il existe $z \in \mathbf{R}^n$, $x = a(z)$ et $a'(x) = a'(a(z)) = a(a'(z)) \in \text{Im}(a)$.

En reprenant la base $\mathcal{B}$, citée plus haut, adaptée à $\mathbf{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a)$ la matrice de a' est alors diagonale par blocs $\begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix}$ avec $D \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbf{R})$ matrice de l'endomorphisme induit par a' sur $\text{Im}(a)$ ($r = \dim \text{Im}(a)$).

En prenant toujours W la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a

$$A' = W \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} W^{-1}$$

12. • D'après $A = AA'A$, on a $AA' = AA'AA'$, donc $AA' = (AA')^2$, ce qui donne $a \circ a' = (a \circ a')^2$ et donc $a \circ a'$ est un projecteur.

• Soit $x \in \text{Ker}(a)$, puisque $\text{Ker}(a)$ est stable par a' , on a $a'(x) \in \text{Ker}(a)$ donc $a \circ a'(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(a \circ a')$. On a montré : $\text{Ker}(a) \subset \text{Ker}(a \circ a')$.

Puisque $AA' = A'A$ et $A = AA'A$, on a $a \circ a' = a' \circ a$ et $a = a \circ a' \circ a = a \circ a \circ a'$, donc si $x \in \text{Ker}(a \circ a')$ alors $a(x) = a((a \circ a')(x)) = a(0) = 0$ et donc $x \in \text{Ker}(a)$. On a montré $\text{Ker}(a \circ a') \subset \text{Ker}(a)$.

Par double inclusion $\text{Ker}(a \circ a') = \text{Ker}(a)$.

• On a toujours $\text{Im}(a \circ a') \subset \text{Im}(a)$, en effet :

$$\forall y \in \text{Im}(a \circ a') \quad \exists x \in \mathbf{R}^n, \quad y = (a \circ a')(x) = a(a'(x)).$$

On a déjà vu $a = a \circ a' \circ a = (a \circ a') \circ a$, donc $\text{Im}(a) \subset \text{Im}(a \circ a')$, en effet :

$$\forall y \in \text{Im}(a) \quad \exists x \in \mathbf{R}^n, \quad y = a(x) = (a \circ a' \circ a)(x) = (a \circ a')(a(x)).$$

Par double inclusion $\text{Im}(a \circ a') = \text{Im}(a)$.

Le noyau et l'image du projecteur $a \circ a'$ sont respectivement $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$.

$W^{-1}(AA')W$ est la matrice du projecteur $a \circ a'$ dans la base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition

$$\mathbf{R}^n = \text{Im}(a) \oplus \text{Ker}(a) = \text{Im}(a \circ a') \oplus \text{Ker}(a \circ a') \text{ donc } W^{-1}(AA')W = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

13. D'après ce qui, précède $W^{-1}(AA')W = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ et

$$W^{-1}(AA')W = W^{-1}.A.W.W^{-1}.A'.W = \begin{pmatrix} B & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} D & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BD & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } B.D = I_r \text{ et } A' = W \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdot W^{-1}.$$

Donc si A' est un pseudo-inverse de A alors A' est unique donnée par $A' = W \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix} \cdot W^{-1}$.

A admet au plus un pseudo-inverse.

Exercice 2 : Extrait de CCINP 2007 PSI

Etant donnée une matrice A , la notation $A = (a_{i,j})$ signifie que $a_{i,j}$ est le coefficient de la ligne i et de la colonne j de la matrice A .

Lorsque $A = (a)$ est une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbf{R})$, on identifie A avec le réel a .

On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice carrée A .

Soient p et n deux entiers naturels tels que $p \leq n$, on rappelle la notation $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$.

- Pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $A_p = (a_{i,j})$ la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n-p+1}(\mathbf{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j} = \binom{p+i+j-2}{p+i-1}$ avec $(i,j) \in \llbracket 1, n-p+1 \rrbracket^2$.

On note

$$d_p = \det(A_p)$$

- On note D_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $(i+j)!$, **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n .**

- On note Δ_n le déterminant de la matrice carrée de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est $\binom{i+j}{i}$ **les lignes et les colonnes étant indexées de 0 à n .**

On note de façon abusive $D_n = \det((i+j)!)$ et $\Delta_n = \det\left(\binom{i+j}{i}\right)$ avec $(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$.

14. Par définition :

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \binom{p+1+1-2}{p+1-1} = \binom{p}{p} = 1 \\ a_{1,n-p+1} &= \binom{p+1+n-p+1-2}{p+1-1} = \binom{n}{p} \\ a_{n-p+1,1} &= \binom{p+n-p+1+1-2}{p+n-p+1-1} = \binom{n}{n} = 1 \\ a_{n-p+1,n-p+1} &= \binom{p+n-p+1+n-p+1-2}{p+n-p+1-1} = \binom{2n-p}{n} \end{aligned}$$

15. Pour tout entier naturel $n \geq 2$ par définition,

- Pour $p = n$, on a $A_p = A_n \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ et

$$d_n = \det(A_n) = a_{1,1} = 1$$

- Pour $p = n - 1$, on a $A_p = A_{n-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ et $n - p + 1 = 2$ donc

$$d_{n-1} = \det(A_{n-1}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \binom{2n - (n-1)}{n} - \binom{n}{n-1} = (n+1) - n = 1$$

- Pour $p = n - 2$, on a $A_p = A_{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$.

On calcule d_{n-2} en effectuant les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis en développant par rapport à la première colonne, ce qui donne :

$$d_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & n-1 & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 2 & 2n+1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & n \\ 2 & 2n+1 \end{vmatrix} = 1$$

16. On suppose que la matrice A_p possède au moins deux lignes. On note L_i la ligne d'indice i .

- (a) Dans le calcul de d_p on effectue les opérations suivantes : pour i variant de $n - p + 1$ à 2, on retranche la ligne L_{i-1} à la ligne L_i (opération codée $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$).

- On remarque que $\forall i \in \llbracket 2, n - p + 1 \rrbracket \quad a_{i,1} = \binom{p+i-1}{p+i-1} = 1$, donc le nouveau coefficient d'indice $(i, 1)$ de la nouvelle ligne L_i est $b_{i,1} = a_{i,1} - a_{i-1,1} = 0$.

- Pour $j \in \llbracket 2, n - p + 1 \rrbracket$, le coefficient d'indice (i, j) de la nouvelle ligne L_i est donné par :

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= a_{i,j} - a_{i-1,j} \\ &= \binom{p+i+j-2}{p+i-1} - \binom{p+i-1+j-2}{p+i-1-1} \\ &= \binom{p+i+j-2}{p+i-1} - \binom{(p+i+j-2)-1}{(p+i-1)-1} \end{aligned}$$

par la formule du triangle de Pascal on a :

$$b_{i,j} = \binom{p+i+j-3}{p+i-1}$$

- (b) En effectuant les opérations citées dans la question précédente sur le déterminant d_p , on obtient le déterminant d'une matrice par blocs : $d_p = \det \begin{pmatrix} 1 & L_p \\ 0 & B_p \end{pmatrix}$, L_p étant une matrice ligne et B_p matrice carrée d'ordre $n - p + 1 - 1 = n - (p + 1) - 1$. Et d'après ce qui précède, le coefficient d'indice $(i, j) \in \llbracket 2, n - p + 1 \rrbracket^2$ de B_p s'écrit

$$b_{i,j} = \binom{(p+1) + (i-1) + (j-1) - 2}{(p+1) + (i-1) - 1}$$

c'est donc le coefficient d'indice $(i-1, j-1) \in \llbracket 1, n - (p+1) - 1 \rrbracket^2$ de la matrice A_{p+1} , donc $d_p = \det \begin{pmatrix} 1 & L_p \\ 0 & A_{p+1} \end{pmatrix}$.

En effectuant le développement de ce dernier déterminant par rapport à la première colonne ou en utilisant la propriété sur le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, on a :

$$d_p = (-1)^{1+1} \times 1 \times \det(A_{p+1}) = 1 \times \det(A_{p+1}) = d_{p+1}$$

On en déduit que la suite (d_p) est constante, et avec les résultats de la question 17, on

a finalement $d_p = 1$

17. • $D_0 = \det(0!) = 1$.

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 0! & 1! \\ 1! & 2! \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1.$$

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0! & 1! & 2! \\ 1! & 2! & 3! \\ 2! & 3! & 4! \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix} = 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ pour obtenir $D_2 = 2 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$. On développe par

rapport à la première colonne et on obtient :

$$D_2 = 2(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = 2 \times (10 - 8) = 4$$

• $\Delta_0 = \det \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1$ et $\Delta_1 = \det \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$.

$$\Delta_2 = \det \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on obtient $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. On développe par rapport à la première colonne

et on obtient finalement

$$\Delta_2 = (-1)^{1+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1$$

18. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(i+j)! = \frac{(i+j)!}{i!j!}$, alors la ligne L_i de Δ_n se factorise par $\frac{1}{i!}$, ce qui donne par multilinéarité du déterminant :

$$\Delta_n = \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) \times \det \left(\frac{(i+j)!}{j!} \right)$$

La colonne C_j du déterminant $\det \left(\frac{(i+j)!}{j!} \right)$ se factorise par $\frac{1}{j!}$, alors par multilinéarité du déterminant on obtient :

$$\Delta_n = \left(\prod_{i=0}^n \frac{1}{i!} \right) \times \left(\prod_{j=0}^n \frac{1}{j!} \right) \times \det((i+j)!)$$

$$\text{Et donc } \Delta_n = \left(\prod_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)^2 D_n$$

19. Dans Δ_n , en se ramenant à des indices de ligne et de colonne variant entre 1 et $n+1$, on

peut écrire $\Delta_n = \det \left(\binom{i' + j' - 2}{i' - 1} \right) = d_0$. On a donc $\Delta_n = 1$ et $D_n = \left(\prod_{k=0}^n k! \right)^2$