

Exercice 1

Soit $A \in GL_n(\mathbf{C})$ et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, montrer que $N : X \mapsto \|AX\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Exercice 2

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$ et $p \in \mathbf{N}^*$. On pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Montrer que $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|x\|_p$.

Exercice 3

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, F un autre espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme. Montrer que $N_f : y \in F \mapsto N(f^{-1}(y))$ est une norme sur F .

Exercice 4

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbf{R})$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite de fonctions $f_n : x \in [0, 1] \mapsto \sqrt{n}x^n$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ n'est pas bornée pour la norme infinie.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est bornée pour la norme $N_2 : f \mapsto \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}$.
3. Qu'en est-il pour la norme $N_1 : f \mapsto \int_0^1 |f(t)| dt$?

Exercice 5

Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, noté sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on pose

$$\|P\| = \sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} |P(x)| \quad \text{et} \quad N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$$

1. Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers le polynôme nul pour la norme $\|\cdot\|$ et le polynôme 1 pour la norme N . Que peut-on en déduire?
3. Construire une norme sur $\mathbf{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers le polynôme X .

Exercice 6

Soit $E = C^1([a, b], \mathbf{K})$ et $c \in [a, b]$.

1. Montrer que les applications $N : f \in E \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N_c : f \mapsto |f(c)| + \|f'\|_\infty$ sont des normes sur E .
2. Montrer que N et N_c sont équivalentes.
3. N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes?

Exercice 7

Soit E l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ lipschitziennes. On définit sur E :

$$N(f) = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \quad N_a(f) = |f(a)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$$

Montrer que N et N_a sont des normes sur E et qu'elles sont équivalentes.

Exercice 8

Soit $(A_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui converge vers une matrice A . Montrer que pour toute matrice P fixée dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ xw, la suite $(PA_p)_{p \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice PA .

Exercice 9

Soit $A \in \mathbf{S}_n(\mathbf{R})$. Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$.

1. Montrer que la suite de matrices $(S_p)_{p \in \mathbf{N}}$ converge.
2. Donner sa limite dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on note $N(A) = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$.

1. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et qu'elle vérifie :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2 \quad N(AB) \leq N(A)N(B)$$

2. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\| \cdot \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie :
 $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad \|AB\| = \|A\| \cdot \|B\|.$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, pour $p \in \mathbf{N}$ on pose $S_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que la suite $(S_p)_{p \in \mathbf{N}}$ converge.