

Dans tout ce chapitre  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  et  $E$  désigne un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel.

**Remarque :**

Si  $A$  est une partie non vide et majorée de  $\mathbf{R}$  alors  $\forall k \in \mathbf{R}^+ \quad \text{Sup}(kA) = k\text{Sup}(A)$ .

## 1 Norme et distance associée

### Definition 1.1 Norme

On appelle norme sur l'espace  $E$ , toute application  $N$  définie sur  $E$  qui vérifie :

- $\forall x \in E, \quad N(x) \in \mathbf{R}^+ \quad (\text{positivité})$
- $\forall x \in E \quad N(x) = 0 \iff x = 0_E \quad (\text{séparation})$
- $\forall \lambda \in \mathbf{K}, \quad \forall x \in E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x) \quad (\text{homogénéité})$
- $\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad (\text{inégalité triangulaire})$

$(E, N)$  est alors appelé un espace vectoriel normé. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme, on dit que  $E$  est un espace vectoriel normé, et on préférera souvent la notation  $\|x\|$  à  $N(x)$ .

### Proposition 1.1 Norme associée à un produit scalaire

Si  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$  alors l'application  $\| \cdot \| : \begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbf{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{matrix}$  est une norme, appelée norme associée au produit scalaire.

### Proposition 1.2 Inégalités triangulaire et triangulaire inverse

Pour toute norme  $\| \cdot \|$  sur  $E$ , on a :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad | \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Et on peut généraliser l'inégalité triangulaire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n \quad \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \cdot \|x_k\|$$

### Definition 1.2 Distance associée à une norme

Si  $\| \cdot \|$  est une norme sur l'espace  $E$ , on appelle distance associée à cette norme l'application

$$d : \begin{matrix} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = \|x - y\| \end{matrix}$$

**Proposition 1.3**

Si  $d$  est la distance associée à une norme  $\| \cdot \|$  sur  $E$  alors :

- $d$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}^+$
- $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{séparation})$
- $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{symétrie})$
- $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{inégalité triangulaire})$

## 2 Exemples de normes usuelles

### 2.1 Norme sur $\mathbf{R}$ et sur $\mathbf{C}$

- La valeur absolue est une norme sur  $\mathbf{R}$ .

Si  $N$  est une autre norme sur  $\mathbf{R}$  alors il existe  $\lambda > 0$  tel que  $N = \lambda | \cdot |$ .

- L'application  $z \mapsto |z|$  est une norme sur  $\mathbf{C}$ .

### 2.2 Normes usuelles sur $\mathbf{K}^p$

On définit trois normes usuelles sur  $\mathbf{K}^p$ . Soit  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$ ,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^p |x_k| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_k|^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq p} |x_k|.$$

Sur  $\mathbf{R}^p$ , la norme  $\| \cdot \|_2$  est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.

**Remarque 2.2.1** Normes sur un espace vectoriel de dimension finie

On peut, comme sur  $\mathbf{K}^p$ , définir trois normes usuelles sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $p$ .

Si  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  est une base de  $E$  alors  $\forall x \in E, \quad \exists! (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$  tel que  $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$ ,

et on définit :

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^p |x_k|^2} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq p} |x_k|$$

## 2.3 Norme de la convergence uniforme

On note  $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$  l'espace vectoriel des fonctions définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$ , à valeurs dans  $\mathbf{K}$  et qui sont bornées sur  $I$ .

### Proposition 2.3.1 Norme sur $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$

L'application  $\| \cdot \|_\infty$  définie sur  $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$  par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| = \sup \{|f(x)|, x \in I\}$$

est une norme sur  $\mathcal{B}(I, \mathbf{K})$ .

On l'appelle la norme de la convergence uniforme, ou encore norme infinie.

### Exemple 2.1

Soit  $f : \begin{matrix} [-1, 1] & \rightarrow & \mathbf{C} \\ x & \mapsto & e^{(1+i)x} \end{matrix}$ . Calculer  $\|f\|_\infty$ .

## 3 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Dans tout ce paragraphe,  $(E, \| \cdot \|_E)$  désigne un espace vectoriel normé.

### Definition 3.1

On appelle suite d'éléments de l'espace vectoriel  $E$ , toute application  $u : \begin{matrix} \mathbf{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{matrix}$ , notée  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

On note  $E^{\mathbf{N}}$  l'ensemble des suites d'éléments de  $E$ .

### Definition 3.2 Suite bornée

On dit qu'une suite  $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$  est bornée si et seulement si il existe  $M > 0$  tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \|u_n\|_E \leq M$$

On note  $\ell^\infty(E)$  l'ensemble des suites bornées.

### Proposition 3.1

$\ell^\infty(E)$  est un espace vectoriel qui peut être muni de la norme uniforme :

$$\forall u \in \ell^\infty(E), \quad \|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} \|u_n\|_E$$

### Definition 3.3 Convergence

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$ .

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge pour la norme  $\| \cdot \|_E$  si et seulement si il existe  $\ell \in E$  tel que la suite numérique  $(\|u_n - \ell\|_E)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers 0, ce qui donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq N \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

**Proposition 3.2**

1. Si une suite converge pour une norme alors sa limite  $\ell$  est unique, notée  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .
2. Toute suite convergente est bornée.

**Remarque 3.1**

Si  $N_1$  et  $N_2$  sont deux normes sur  $E$ , une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$  peut converger vers  $\ell \in E$  pour une des normes et pas pour l'autre.

Par exemple : la suite d'éléments de  $E = C^0([0, 1])$   $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$  avec  $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$  converge vers la fonction nulle pour la norme  $\| \cdot \|_1$  mais pas pour la norme  $\| \cdot \|_\infty$ .

**Proposition 3.3** *Opérations algébriques - Suites extraites*

On considère deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  de  $E^{\mathbf{N}}$ , deux scalaires  $\alpha$  et  $\beta$  et une suite de scalaires  $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

- Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell_1$  et  $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell_2$  alors la suite  $(\alpha u_n + \beta v_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\alpha \ell_1 + \beta \ell_2$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell$  et si  $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers le scalaire  $\lambda$  alors la suite  $(\lambda_n u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\lambda \ell$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell$  alors toutes ses suites extraites convergent vers  $\ell$ .
- Si  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\ell$  alors la suite numérique  $(\|u_n\|)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\|\ell\|$ .

## 4 Comparaison de normes

**Definition 4.1** *Normes équivalentes*

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur le même espace vectoriel  $E$ . On dit que ces deux normes sont équivalentes si et seulement si :

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists \beta > 0, \quad \forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Ce qui revient à dire :

$$\begin{cases} \exists a > 0 & N_1 \leq a N_2 \\ \exists b > 0 & N_2 \leq b N_1 \end{cases}$$

**Proposition 4.1**

Pour deux normes équivalentes, il y a invariance du caractère borné et de la convergence d'une suite (avec même limite).

**Proposition 4.2** Les normes  $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2, \| \cdot \|_\infty$  précédemment définies sur  $\mathbf{K}^p$ , sont équivalentes deux à deux :

$$\forall x \in \mathbf{K}^p, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{p}\|x\|_2 \leq p\|x\|_\infty$$

## 5 Cas particulier de la dimension finie

**Proposition 5.1** *Équivalence des normes en dimension finie (admis)*

Dans un espace vectoriel de dimension finie, **toutes les normes sont équivalentes.**

### Corollaire 5.2

En dimension finie, la convergence d'une suite et la valeur de sa limite ne dépendent pas du choix de la norme.

**Proposition 5.3** *Utilisation d'une base*

Soit  $E$  espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ .

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$  et un vecteur  $\ell \in E$  tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n = u_{n,1}e_1 + u_{n,2}e_2 + \dots + u_{n,p}e_p \quad \text{et} \quad \ell = \ell_1e_1 + \ell_2e_2 + \dots + \ell_pe_p$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$  converge vers  $\ell$  si et seulement si pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  la suite coordonnée  $(u_{n,k})_{n \in \mathbf{N}}$  (suite numérique) converge vers  $\ell_k$ .

C'est-à-dire :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,k} = \ell_k.$

### Exemple 5.1

- La suite de matrices définies par  $A_n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n} & e^{-n} \\ \frac{\ln(n)}{n^2} & e^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix}$  converge vers la matrice  $I_2$ .
- Soit  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $p$ , donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite de matrices  $(D^n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge.

**Remarque 5.1** *Cas particulier de  $\mathbf{C}$*

On retrouve qu'une suite de nombres complexes converge si et seulement si les parties réelles et imaginaires convergent.