

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbf{C}^n$ définie pour $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ par :

$$\| (z_1, z_2, \dots, z_n) \|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et on identifie le n -uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. Pour

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\| \| A \| \|_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie de la manière suivante :

$$\| \| A \| \|_\infty = \sup_{X \in \mathbf{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \| AX \|_\infty.$$

On admet que $A \mapsto \| \| A \| \|_\infty$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Enfin, pour $Z \in \mathbf{C}^n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on pose : $N_P(Z) = \| PZ \|_\infty$.

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On pose $m = \max_{1 \leq i \leq n} |m_{i,i}|$.

- (a) Soit $Z \in \mathbf{C}^n$. Montrer que $\| DZ \|_\infty \leq m \| Z \|_\infty$.

- (b) Déterminer $\| \| D \| \|_\infty$.

2. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ alors $\| \| AB \| \|_\infty \leq \| \| A \| \|_\infty \cdot \| \| B \| \|_\infty$

3. (a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que N_P est une norme sur $\mathbf{C}^n$ ssi P est une matrice inversible.

Lorsque P est inversible, on notera dorénavant $\| \cdot \|_P$ pour N_P et la norme subordonnée à la norme $\| \cdot \|_P$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sera notée $\| \| \cdot \| \|_P$.

- (b) On se donne une matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, montrer que :

$$\| \| A \| \|_P = \| \| PAP^{-1} \| \|_\infty.$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\text{sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M et on définit $\rho(M)$ par : $\rho(M) = \max\{|\mu|, \mu \in \text{sp}(M)\}$.

- (a) Montrer que, pour toute matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$, on a : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.

- (b) Soit $P \in GL_n(\mathbf{C})$. Montrer que $\rho(A) \leq \| \| A \| \|_P$.

- (c) On suppose A diagonalisable.

Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$.

- (d) Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_3(\mathbf{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$.

- (e) Un exemple. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = j$. Déterminer l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$.

5. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Soit donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

- (a) On pose $m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$. Montrer que, pour tout $Z \in \mathbf{C}^2$, on a : $\|AZ\|_\infty \leq m \|Z\|_\infty$. Déterminer $\|A\|_\infty$.

- (b) On suppose la matrice non diagonalisable et on note f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ canoniquement associé à A .

i. Démontrer que $\text{sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément. On le note α .

ii. Démontrer l'existence d'une base e de $\mathbf{C}^2$ telle que : $\text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

iii. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'une base e' de $\mathbf{C}^2$ telle que :

$$\text{Mat}_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } |\beta'| \leq \varepsilon.$$

iv. En déduire l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que : $\|A\|_P \leq \rho(A) + \varepsilon$.

- (c) Déterminer $\inf_{P \in GL_2(\mathbf{C})} \|A\|_P$.

- (d) Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\|A\|_\infty$ et montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que $\|A\|_P \leq 2$.

- (e) On suppose que $\rho(A) < 1$. Justifier l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que : $\|A\|_P < 1$.

Que peut-on en déduire concernant la suite (A^n) ?

Fin de l'énoncé