

Exercice : Extrait de EPITA 2021

On considère un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie, on note Id l'endomorphisme identité de E , et on se propose d'étudier l'endomorphisme $f = p + q$ où p et q sont deux projecteurs de E qui commutent, c'est-à-dire qui vérifient : $p \circ q = q \circ p$.

Etude des valeurs propres de $f = p + q$

1. En utilisant $p \circ q = q \circ p$ et la linéarité de p et de q , on a :

$$f^2 = p + q + 2p \circ q = f + 2p \circ q \quad \text{et} \quad f^3 = p + q + 6p \circ q = f + 6p \circ q = f + 3(f^2 - f)$$

On en déduit que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$ et donc $X^3 - 3X^2 + 2X$ est un polynôme annulateur de f

2. On sait que toute valeur propre de f est racine du polynôme annulateur $X^3 - 3X^2 + 2X$. Or $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X - 1)(X - 2)$, donc

les valeurs propres possibles de l'endomorphisme $f = p + q$ sont 0, 1 et 2.

Etude des sous-espaces propres de $f = p + q$

3. (a) • Soit $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$ i.e. $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où $(p + q)(x) = p(x) + q(x) = 0$ i.e. $x \in \text{Ker}(p + q)$. Donc $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \subset \text{Ker}(p + q)$.
- Soit $x \in \text{Ker}(p + q)$, on a $p(x) + q(x) = 0$ donc $p(x) = -q(x)$. On applique p et q à cette égalité de vecteurs, ce qui donne $(p^2 = p$ et $q^2 = q)$ $p(x) = -p \circ q(x)$ et $q \circ p(x) = -q(x) = p(x)$, or $p \circ q = q \circ p$ donc $p(x) = -p(x)$. Finalement $p(x) = 0$ et ainsi $0 = p(x) + q(x) = q(x) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Ainsi on a bien $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) = \text{Ker}(p + q)$.

- (b) Montrons que $\text{Ker}(p + q - 2Id) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$:

1ère méthode :

p et q étant des projecteurs, on sait que $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id) = \text{Ker}(Id - p)$ et $\text{Im}(q) = \text{Ker}(q - Id) = \text{Ker}(Id - q)$. De plus on sait que $Id - p$ et $Id - q$ sont aussi des projecteurs et puisque p et q commutent, $Id - p$ et $Id - q$ commutent aussi, on déduit alors du 3(a) que :

$$\text{Ker}(p + q - 2Id) = \text{Ker}((Id - p) + (Id - q)) = \text{Ker}(Id - p) \cap \text{Ker}(Id - q) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q).$$

2nde méthode :

Soit $x \in \text{Ker}(p + q - 2Id)$, on a $p(x) + q(x) - 2x = 0$ donc $x = p\left(\frac{x}{2}\right) + q\left(\frac{x}{2}\right)$. Puisque $p^2 = p$, on a $p(x) = p\left(\frac{x}{2}\right) + p \circ q\left(\frac{x}{2}\right)$ et puisque $p \circ q = q \circ p$ on a $p(x) = 2p\left(\frac{x}{2}\right) = p\left(\frac{x}{2}\right) + q \circ p\left(\frac{x}{2}\right)$ donc $p\left(\frac{x}{2}\right) = q \circ p\left(\frac{x}{2}\right)$ et finalement

$$x = q \circ p\left(\frac{x}{2}\right) + q\left(\frac{x}{2}\right) = q\left(p\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\right) \in \text{Im}(q)$$

Par symétrie on obtient aussi $x = p\left(q\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\right) \in \text{Im}(p)$ donc $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$ et donc $\text{Ker}(p + q - 2Id) \subset \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

Réciproquement, on sait que pour tout projecteur p , $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - Id)$, donc si $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$ alors $x = p(x) = q(x)$ et donc $p(x) + q(x) - 2x = 0$, ce qui donne $x \in \text{Ker}(p + q - 2Id)$ et $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \subset \text{Ker}(p + q - 2Id)$.

Donc $\boxed{\text{Ker}(p + q - 2Id) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q).}$

4. Par définition, 0 est valeur propre de $f = p + q$ si, et seulement si $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$, or $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(p + q) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$. Donc 0 est valeur propre de f si, et seulement si, $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \neq \{0\}$ et $E_0(f) = \text{Ker}(f) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

2 est valeur propre de f si, et seulement si $\text{Ker}(p + q - 2Id) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \neq \{0\}$ et $E_2(f) = \text{Im}(p) \cap \text{Im}(q)$.

5. On a déjà vu $f^2 = p + q + 2p \circ q = f + 2p \circ q$ donc $2f - f^2 = f - 2p \circ q = p + q - 2p \circ q$, donc $\text{Im}(p + q - 2p \circ q) = \text{Im}(2f - f^2)$.

- Soit $x \in \text{Im}(2f - f^2)$, il existe $z \in E$ tel que $x = 2f(z) - f^2(z)$. D'où

$$f(x) = 2f^2(z) - f^3(z) \underset{\text{car } f^3 - 3f^2 + 2f = 0}{=} 2f^2(z) - 3f^2(z) + 2f(z) = 2f(z) - f^2(z) = x$$

Ainsi

$$f(x) - x = 0$$

i.e. $x \in \text{Ker}(f - Id)$ donc $\text{Im}(2f - f^2) \subset \text{Ker}(f - Id)$.

- Soit $x \in \text{Ker}(f - Id)$, alors $x = f(x)$ et donc $x = f^2(x)$, on peut écrire $x = (2f - f^2)(x)$. On a donc $x \in \text{Im}(2f - f^2)$.

On a montré par double inclusion : $\boxed{\text{Ker}(f - Id) = \text{Im}(2f - f^2) = \text{Im}(p + q - 2pq)}$

6.

$$(Id - 2p)^2 = Id - 4p + 4p = Id$$

et

$$(Id - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q) = p + q - 2p \circ q - 2p - 2p \circ q + 4p \circ q = q - p$$

- Si 1 est valeur propre de f alors $\text{Ker}(f - Id) = \text{Im}(p + q - 2p \circ q) \neq \{0\}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $(p + q - 2p \circ q)(x) \neq 0$.

$(Id - 2p)^2 = Id$, donc $Id - 2p$ est inversible d'inverse lui-même, on a donc
 $(p + q - 2p \circ q)(x) \neq 0 \implies (Id - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q)(x) \neq 0$, ce qui donne $(q - p)(x) \neq 0$
d'où $p \neq q$.

• Réciproquement si $p \neq q$ alors il existe $x \in E$ tel que $(q - p)(x) \neq 0$ et donc
 $(Id - 2p) \circ (p + q - 2p \circ q)(x) \neq 0$, ce qui entraîne $(p + q - 2p \circ q)(x) \neq 0$ et ainsi
 $\text{Im}(p + q - 2p \circ q) = \text{Ker}(f - Id) \neq \{0\}$, donc 1 est valeur propre.

On a bien obtenu : 1 est valeur propre de $f = p + q$ si, et seulement si $p \neq q$.

Réduction de l'endomorphisme $f = p + q$

7. $f \in \mathcal{L}(E)$ donc $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - Id) + \text{Ker}(f - 2Id) \subset E$.

Soit $x \in E$.

• *Analyse* : On suppose qu'il existe $x_0 \in \text{Ker}(f)$, $x_1 \in \text{Ker}(f - Id)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f - 2Id)$ tels que $x = x_0 + x_1 + x_2$, alors par linéarité de f :

$$f(x) = x_1 + 2x_2 \quad \text{et} \quad f^2(x) = x_1 + 4x_2$$

On obtient ainsi un système à trois équations vérifié par les trois inconnues x_0, x_1, x_2 . Après résolution de ce système linéaire on obtient :

$$x_0 = x - \frac{3}{2}f(x) + \frac{1}{2}f^2(x), \quad x_1 = 2f(x) - f^2(x), \quad x_2 = \frac{1}{2}(f^2(x) - f(x))$$

On a ainsi obtenu que si x_0, x_1, x_2 existent alors ils sont uniques, donnés par les formules ci-dessus.

• *Synthèse* : Soit $x_0 = x - \frac{3}{2}f(x) + \frac{1}{2}f^2(x)$, $x_1 = 2f(x) - f^2(x)$, $x_2 = \frac{1}{2}(f^2(x) - f(x))$.

On a directement $x_0 + x_1 + x_2 = x$ et en utilisant $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$, on obtient facilement

$$\begin{cases} f(x_0) = f(x - \frac{3}{2}f(x) + \frac{1}{2}f^2(x)) = 0 \\ (f - Id)(x_1) = (f - Id)(2f(x) - f^2(x)) = 0 \\ (f - 2Id)(x_2) = (f - 2Id)(\frac{1}{2}(f^2(x) - f(x))) = 0 \end{cases}$$

donc $x_0 \in \text{Ker}(f)$, $x_1 \in \text{Ker}(f - Id)$ et $x_2 \in \text{Ker}(f - 2Id)$.

On a montré par analyse synthèse

$$\forall x \in E \quad \exists!(x_0, x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f - Id) \times \text{Ker}(f - 2Id) \quad x = x_0 + x_1 + x_2$$

donc $E \subset \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f - 2Id)$ et finalement

$$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f - 2Id).$$

Remarque :

Certains ont voulu montrer d'abord que $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - Id) + \text{Ker}(f - 2Id)$ est une somme directe puis que $E \subset \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f - 2Id)$. Mais attention à la façon de prouver qu'une somme de trois sous-espaces (et non deux) est directe, cela se traite par la caractérisation vue dans le cours :

Soit $(x_0, x_1, x_2) \in \text{Ker}(f) \times \text{Ker}(f - Id) \times \text{Ker}(f - 2Id)$ tel que $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Il faut montrer que $x_0 = 0 = x_1 = x_2$:

On a $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ donc par linéarité de f
$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 &= 0 \\ f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) &= f(0) = 0 \\ f^2(x_0) + f^2(x_1) + f^2(x_2) &= f^2(0) = 0 \end{cases},$$
 ce qui donne

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0 \implies \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 &= 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_2 &= 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{cases}$$

Et on montre $E \subset \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f - 2Id)$ par analyse-synthèse comme écrit précédemment.

8. 1ère méthode :

$X(X - 1)(X - 2)$ est un polynôme annulateur de f et il est scindé à racines simples donc $f = p + q$ est diagonalisable.

2nde méthode :

On sait que les sous-espaces propres de f sont **parmi** les noyaux $\text{Ker}(f)$, $\text{Ker}(f - Id)$ et $\text{Ker}(f - 2Id)$ puisque $Sp(f) \subset \{0, 1, 2\}$.

$E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Ker}(f - 2Id)$, un ou deux de ces noyaux peut être réduit au vecteur nul et les autres sont alors sous-espaces propres de f , donc E est égal à la somme

directe des sous-espaces propres de f et $f = p + q$ est diagonalisable.

Avec les notations de la question 7 on a pour tout $x \in E$

$$\begin{cases} \pi_0(x) = x_0 = x - \frac{3}{2}f(x) + \frac{1}{2}f^2(x) \\ \pi_1(x) = x_1 = 2f(x) - f^2(x) \\ \pi_2(x) = x_2 = \frac{1}{2}(f^2(x) - f(x)) \end{cases}$$

Donc
$$\pi_0 = Id - \frac{3}{2}f + \frac{1}{2}f^2 \quad \pi_1 = 2f - f^2 \quad \pi_2 = \frac{1}{2}(f^2 - f)$$

Problème : Extrait de Centrale PC 2015

$\mathbf{K}$ désigne le corps $\mathbf{R}$ ou le corps $\mathbf{C}$ et E est un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

Si f est un endomorphisme de E , pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f , c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F .

Pour tout endomorphisme f de E on définit la suite $(f^k)_{k \in \mathbf{N}}$ des puissances de f par : $f^0 = Id_E$ et $f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Première partie :

Dans cette partie, f désigne un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E .

9. Soit D une droite engendrée par un vecteur $\mathbf{y}$ de E alors $\mathbf{y} \neq 0$ et $D = Vect(\mathbf{y})$.

- Si $D = Vect(\mathbf{y})$ est stable par f alors puisque $\mathbf{y} \in D$, on a $f(\mathbf{y}) \in D = Vect(\mathbf{y})$ donc il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{y}$. Puisque $\mathbf{y} \neq 0$, $\mathbf{y}$ est un vecteur propre de f .
- Si $\mathbf{y}$ est un vecteur propre de f alors $\mathbf{y} \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $f(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{y}$.
 $\forall x \in D = Vect(\mathbf{y}), \exists \alpha \in \mathbf{K}, x = \alpha \mathbf{y}$ alors par linéarité de f ,
 $f(x) = \alpha f(\mathbf{y}) = \alpha \lambda \mathbf{y} \in Vect(\mathbf{y})$, donc D est stable par f .

Par double implication on a montré :

Une droite $D = Vect(\mathbf{y})$ est stable par f si et seulement si $\mathbf{y}$ est un vecteur propre de f .

10. (a) • f est linéaire donc $f(0) = 0$ et donc $\{0\}$ est un sous-espace stable par f .
 f est un endomorphisme de E donc $\forall x \in E, f(x) \in E$, donc E est stable par f .

$\{0\}$ et E sont toujours deux sous-espaces stables par f .

- Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ de matrice dans la base canonique $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Un sous-espace stable par f est de dimension égale à 0, ou 1 ou 2, c'est donc soit $\{0\}$, soit une droite D engendrée par un vecteur propre $\mathbf{y}$ de f , soit $\mathbf{R}^2$.

Or

$$\lambda \in Sp(f) \iff \lambda \in Sp_{\mathbf{R}}(A) \iff \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\lambda \in Sp(f) \iff \lambda^2 + 1 = 0 \text{ et } \lambda \in \mathbf{R}$$

On en déduit que f n'admet pas de valeur propre et par conséquent n'admet pas de vecteur propre $\mathbf{y}$. Il n'existe donc pas de sous-espace stable par f de dimension 1, donc les seuls sous-espaces propres de f sont $\{0\}$ et $\mathbf{R}^2$.

- (b) • On suppose que $\dim(E) = n \geq 2$ avec $f \neq 0$ et f non injectif.
 $f \neq 0$ alors $Ker(f) \neq E$ et f non injectif alors $Ker(f) \neq \{0\}$.

$Ker(f)$ est un sous-espace stable par f : $\forall x \in Ker(f), f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $f(x) \in Ker(f)$. (Ou encore plus rapide : f et f commutent donc $Ker(f)$ est stable par f .)

On a donc trouvé trois sous-espaces distincts stables par $f : \{0\}, \text{Ker}(f)$ et E .

• Supposons que n soit impair, par le théorème du rang on sait que $n = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$ et donc ici $\dim \text{Im}(f) \neq \dim \text{Ker}(f)$. De plus $f \neq 0$ et f non injectif donc $\text{Im}(f) \neq \{0\}$ et $\text{Im}(f) \neq E$. Or $\text{Im}(f)$ est aussi stable par f (f et f commutent), on a donc trouvé un quatrième sous-espace stable par

f . $\{0\}, \text{Ker}(f), \text{Im}(f)$ et E sont quatre sous-espaces stables par f .

• Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A est triangulaire à diagonale nulle, donc la seule valeur propre de A (de f) est 0 et f est de rang égal à 1, donc $\text{Ker}(f)$ est de dimension 1 et $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(e_1)$.

Tout sous-espace F stable par f est de dimension 0 ou 1 ou 2, donc $F = \{0\}$ ou $F = \mathbf{R}^2$ ou F est une droite.

Si F est une droite stable par f alors F est engendré par un vecteur propre $\mathbf{y}$ qui est associé à la seule valeur propre 0 donc $F \subset \text{Ker}(f)$ et $F = \text{Ker}(f)$ par égalité des dimensions.

f ne possède que trois sous-espaces stables : $\{0\}, \text{Ker}(f)$ et $\mathbf{R}^2$.

11. (a) Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ avec $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, e_i$ un vecteur propre de f .

Si $x \in F$ alors il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$. Par linéarité de f , on aura :

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$$

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \exists \lambda_i \in \mathbf{K}, f(e_i) = \lambda_i e_i$ puisque e_i est un vecteur propre de f , donc

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i e_i$$

$f(x)$ est combinaison linéaire des vecteurs $e_1, \dots, e_p$ donc $f(x) \in F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres est donc stable par f .

Soit $\lambda \in \mathbf{K}$ une valeur propre de f et $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ le sous-espace propre associé est stable par f avec $\forall x \in E_\lambda, f(x) = \lambda x$, donc l'endomorphisme de E_λ induit par f est $\lambda \text{Id}_{E_\lambda}$ (homothétie de rapport λ sur E_λ).

(b) On suppose ici que f admet un sous-espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ de dimension au moins égale à 2, alors E_λ admet au moins une famille libre contenant 2 vecteurs $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$. $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in E_\lambda$ et $\alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \neq 0$ ($(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est libre), donc $F_\alpha = \text{Vect}(\alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ est une droite engendrée par un vecteur propre de f , c'est donc une droite stable par f .

Puisque $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est libre, $\alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mu(\beta \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \iff \alpha = \mu\beta$ et $1 = \mu$ donc $\alpha = \beta$. On en déduit que si $\alpha \neq \beta$ alors $\alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ et $\beta \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ ne sont pas colinéaires donc F_α

et F_β sont deux droites distinctes. On a ainsi une infinité de droites stables par f .

- (c) On suppose que tout sous-espace de E est stable par f .

En particulier $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $Vect(x)$ est une droite stable par f , donc :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \exists \lambda_x \in \mathbf{K}, \quad f(x) = \lambda_x x$$

Montrons que $\forall (x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, $\lambda_x = \lambda_y$:

Soit $(x, y) \in E^2$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$:

- Si (x, y) est une famille libre alors $x + y \neq 0$ et

$$\lambda_x x + \lambda_y y = f(x) + f(y) = f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$$

par identification des coefficients puisque la famille (x, y) est libre on a :

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

- Si (x, y) est une famille liée alors il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que $y = \alpha x$ et

$$\lambda_y y = f(y) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$$

or $y \neq 0$ donc $\lambda_y = \lambda_x$.

Dès que x et y sont non nuls, on a bien $\lambda_x = \lambda_y$. De plus $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0$ pour tout scalaire λ .

On a finalement l'existence d'un scalaire λ tel que $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$.
Si tout sous-espace de E est stable par f alors f est une homothétie.

12. Dans cette question, E est un espace de dimension finie.

- (a) On suppose que f est diagonalisable alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est diagonale, ce qui revient à $\mathcal{B}$ est formée de vecteurs propres de f .

Soit F un sous-espace stable par f , notons k la dimension de F .

- Si $k = n$ alors $F = E$ et $\{0\}$ est un supplémentaire de F stable par f .
- Si $k = 0$ alors $F = \{0\}$ et E est un supplémentaire de F stable par f .
- Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors F admet une base $\mathcal{B}_F = (v_1, \dots, v_k)$ formée de k vecteurs de E . Cette famille $\mathcal{B}_F$ est libre, par théorème de la base incomplète on peut la compléter en une base de E avec $(n - k)$ vecteurs de $\mathcal{B}$ que l'on peut noter $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k}$. On sait alors que $E = F \oplus Vect(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k})$, et $G = Vect(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n-k})$ est un supplémentaire de F stable par f puisqu'il est engendré par une famille de vecteurs propres de f .

- (b) On considère dans cette question que $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et que f est un endomorphisme de E tel que tout sous-espace stable par f admet un supplémentaire stable par f . Montrons qu'alors f est diagonalisable :

Notons χ_f le polynôme caractéristique de f , $\chi_f \in \mathbf{K}[X] = \mathbf{C}[X]$ est donc scindé sur $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, il admet alors au moins une racine λ_1 qui est donc valeur propre de f , son sous-espace propre associé $E_{\lambda_1} = Ker(f - \lambda_1 Id_E) \neq \{0\}$.

Notons alors $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de f (les racines de χ_f) et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres associés. On sait que la somme $E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r}$ est une somme directe et qu'une base de ce sous-espace est formée de vecteurs propres de f donc

$F = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i} \subset E$ est un sous-espace stable par f qui est différent de $\{0\}$.

Supposons : $F \neq E$ alors F admet un supplémentaire $G \neq \{0\}$ stable par f .

On sait alors que l'endomorphisme g induit par f sur G ($g : x \in G \mapsto f(x)$) a un polynôme caractéristique χ_g qui divise χ_f et qui est aussi scindé sur $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, g admet donc une valeur propre $\lambda \in Sp(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. On en déduit :

$$\exists k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad \lambda = \lambda_k \text{ et } \exists x \in G, x \neq 0, \quad g(x) = \lambda x = \lambda_k x$$

Or par définition $g(x) = f(x)$ donc $f(x) = \lambda_k x$ et donc $x \in G \cap E_{\lambda_k}$.

Mais $E_{\lambda_k} \subset F$ et $F \cap G = \{0\}$ donc $G \cap E_{\lambda_k} = \{0\}$ et donc $x = 0$ ce qui est en contradiction avec x est un vecteur propre de g .

On a montré par l'absurde que $F = E$.

On aura donc $E = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}$, et par caractérisation f est diagonalisable.

On reprend l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ de la question 10(a). Les seuls sous-espaces stables par f sont $\{0\}$ et $\mathbf{R}^2$ et ils admettent un supplémentaire stable par f ($\mathbf{R}^2$ et $\{0\}$), mais f n'est pas diagonalisable (n'a pas de valeur propre réelle).

Deuxième partie :

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbf{K}$ -espace vectoriel E de dimension n , qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i .

13. Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si

$$F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i).$$

(a) On considère un sous-espace vectoriel F tel que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

$$\forall x \in F \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in (F \cap E_1) \times \dots \times (F \cap E_p), \quad x = \sum_{i=1}^p x_i, \text{ et } \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket,$$

$f(x_i) = \lambda_i x_i$, on en déduit que :

$$f(x) = \sum_{i=1}^p f(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$$

Or F et E_i sont des sous-espaces vectoriels donc $F \cap E_i$ aussi et donc si $x_i \in F \cap E_i$ alors $\lambda_i x_i \in F \cap E_i$, ce qui entraîne que

$$f(x) = \sum_{i=1}^p f(x_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in F$$

Si $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ alors F est stable par f .

- (b) Soit F un sous-espace de E stable par f et un vecteur x non nul de F .

Soit $x \in F$, alors $x \in E$ et puisque f est diagonalisable on sait que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

On en déduit immédiatement que

$$\exists ! (x_1, \dots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \quad x = \sum_{i=1}^p x_i$$

- (c) Si on note $H_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = \llbracket 1, r \rrbracket$ avec

$1 \leq r \leq p$. Ainsi on a : $x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$.

On note $V_x = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.

Par définition de V_x , la famille $(x_1, \dots, x_r)$ est une famille génératrice de V_x .

La famille $(x_1, \dots, x_r)$ est une famille de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes, alors on sait (c'est du cours) que la famille est libre.

$\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est donc une base de V_x .

- (d) Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, par linéarité de f , on a :

$$f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^r f^{j-1}(x_i)$$

Or $f(x_i) = \lambda_i x_i$, donc par linéarité $f^2(x_i) = f(\lambda_i x_i) = \lambda_i f(x_i) = \lambda_i^2 x_i$ et par récurrence on obtient $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $f^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$, ce qui est encore vrai avec $k = 0$ avec la convention $f^0 = Id_E$ et $\lambda_i^0 = 1$, donc

$$f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{j-1} x_i \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_r) = V_x$$

D'après ce qui précède, les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}_x$ sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, celles de $f(x)$

sont $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix}$, ..., celles de $f^{r-1}(x)$ sont $\begin{pmatrix} \lambda_1^{r-1} \\ \lambda_2^{r-1} \\ \vdots \\ \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$. La matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$

dans la base $\mathcal{B}_x$ est donc

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$$

- (e) La famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une famille de V_x qui contient r vecteurs avec $\dim V_x = r$, c'est une base de V_x si, et seulement si la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ dans la base $\mathcal{B}_x$ est de déterminant non nul.

$$\det(M_x) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix} \text{ est un déterminant de Vandermonde avec } \lambda_1, \dots, \lambda_r \text{ distincts}$$

$$\det(M_x) = \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0 \text{ et } (f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r} \text{ est une base de } V_x.$$

- (f) $\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $x_i \in E_i$ et $x_i \in V_x$, alors il existe d'uniques scalaires $\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}$ tels que

$$x_i = \sum_{j=1}^r \alpha_{j-1} f^{j-1}(x)$$

$x \in F$ et F est stable par f donc $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $f^{j-1}(x) \in F$, et par stabilité de F par combinaisons linéaires, on aura $x_i \in F$ et même $x_i \in E_i \cap F$.

Finalement on a montré : $\forall x \in F$, $\exists!(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$ avec $x_i = 0$ ou $x_i \in E_i \cap F$, dans tous les cas $x_i \in E_i \cap F$, et donc :

$$\forall x \in F, \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in (F \cap E_1) \times \dots \times (F \cap E_p), \quad x = \sum_{i=1}^p x_i$$

On a prouvé $F \subset \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ et puisque $\bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i) \subset F$, on a $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

$$\text{Si } F \text{ est stable par } f \text{ alors } F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i).$$

On a finalement l'équivalence :

$$F \text{ est un sous-espace stable par } f \text{ si, et seulement si } F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i).$$

14. Dans cette question, on se place dans le cas $p = n$.

- (a) On a donc n sous-espaces propres distincts tels que $\dim(E) = n = \sum_{i=1}^n \dim(E_i)$ avec $\dim(E_i) \geq 1$, donc finalement

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \dim(E_i) = 1$$

(b) 1ère méthode :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $E_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ est une droite stable par f .

On sait que $D = \text{Vect}(\mathbf{y})$ est une droite stable par f si et seulement si $\mathbf{y}$ est un vecteur propre de f , donc si et seulement si $\exists i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{y} \in E_i$, mais alors $D = \text{Vect}(\mathbf{y}) \subset E_i$ et par égalité des dimensions $D = E_i$.

Il n'y a donc que n droites stables par f : les n sous-espaces propres de f .

2nde méthode :

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_i = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{Id})$ est une droite stable par f .

Soit D une droite stable par f , d'après la question 13 $D = \bigoplus_{i=1}^n (D \cap E_i)$ donc

$\dim(D) = 1 = \sum_{i=1}^n \dim(D \cap E_i)$, alors il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\dim(D \cap E_i) = 1$ et $\forall j \neq i$ $\dim(D \cap E_j) = 0$. De plus $\dim(D \cap E_i) = 1 = \dim(D) = \dim(E_i)$ donc $D = E_i$. Finalement si D est une droite stable par f alors il existe un unique $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $D = E_i$.

Il n'y a donc que n droites stables par f : les n sous-espaces propres de f .

(c) Si $n \geq 3$ et $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$.

D'après le résultat de la question 13, F est un sous-espace stable par f de dimension k si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^n (F \cap E_i)$ avec $\dim(F) = k = \sum_{i=1}^n \dim(F \cap E_i)$ et $0 \leq \dim(F \cap E_i) \leq 1$, dans cette somme il y a donc k termes de dimension 1 et $n-k$ de dimension 0 et lorsque $\dim(F \cap E_i) = 1$ on aura $F \cap E_i = E_i$.

Un sous-espace stable F de dimension k s'écrit donc comme somme directe de k sous-espaces propres de f . Pour faire un sous-espace stable par f de dimension k , il suffit donc de choisir k sous-espaces propres distincts parmi les n sous-espaces propres de f et d'en faire la somme.

On en déduit qu'il y en a $\binom{n}{k}$ sous-espaces stables par f de dimension k .

(d) On compte le nombre de sous-espaces stables en fonction de leur dimension : $\{0\}$ est le seul sous-espace stable par f de dimension 0, E est le seul sous-espace stable de dimension n , il y a n sous-espaces stables de dimension 1, et il y a $\binom{n}{k}$ sous-espaces stables par f de dimension k avec $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, donc en tout

il y a : $1 + 1 + n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ sous-espaces stables par f .

Ces sous-espaces sont :

$$\{0\}, E, E_1, \dots, E_n, \bigoplus_{i \in I_k} E_i \text{ avec pour } k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad I_k \subset \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } \text{card}(I_k) = k$$

(e) On considère l'endomorphisme f de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de f (de A) sont les racines du polynôme caractéristique de f (de

$$A), \text{ or par définition : } \forall x \in \mathbf{R}, \quad \chi_f(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x+5 & -3 & 1 \\ 2 & x-6 & -2 \\ 5 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

On effectue $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$ et on obtient :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \chi_f(x) = \begin{vmatrix} x+6 & -3 & 1 \\ 0 & x-6 & -2 \\ x+6 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{=} \begin{vmatrix} x+6 & -3 & 1 \\ 0 & x-6 & -2 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \chi_f(x) = (x+6)(x-6)x$$

Le polynôme caractéristique de f est scindé à racines simples et d'après le théorème de Cayley-Hamilton il est annulateur de f alors f est diagonalisable avec pour valeurs propres les réels 6, -6 et 0.

On note $E_0 = \text{Ker}(f)$, $E_6 = \text{Ker}(f - 6Id_E)$ et $E_{-6} = \text{Ker}(f + 6Id_E)$ les sous-espaces propres de f . Nous avons ici le cas $n = p = 3$, d'après l'étude précédente, on sait qu'il y a $2^n = 2^3 = 8$ sous-espaces stables par f qui sont :

$$\{0\}, E_0, E_6, E_{-6}, E_0 \oplus E_6, E_0 \oplus E_{-6}, E_6 \oplus E_{-6} \text{ et } \mathbf{R}^3.$$

• Recherche de $E_0 = \text{Ker}(A)$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \iff AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -5x + 3y - z = 0 \\ -2x + 6y + 2z = 0 \\ -5x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

On effectue $L_2 \leftarrow \frac{-1}{2}L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on obtient

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) &\iff \begin{cases} -5x + 3y - z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ -5x + 3y - z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On effectue $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, ce qui donne

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) &\iff \begin{cases} x - 3y - z = 0 \\ -4x - 2z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z = -2x \\ y = x \end{cases} \\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc $E_0 = \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$.

- Recherche de $E_{-6} = \text{Ker}(A + 6I_3)$:

Autre méthode de recherche d'un sous-espace propre lorsque l'on connaît déjà la dimension de ce sous-espace :

$E_{-6} = \text{Ker}(A + 6I_3)$ avec $A + 6I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 12 & 2 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. On remarque que la première et

dernière colonne de $A + 6I_3$ sont opposées donc $(A + 6I_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ et on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-6}$.

Or on sait que $\dim E_{-6} = 1$, donc $E_{-6} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

- Recherche de $E_6 = \text{Ker}(A - 6I_3)$:

En utilisant l'une ou l'autre méthode vue ci-dessus on trouve $E_6 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Fin du corrigé