

Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I désigne un intervalle de $\mathbf{R}$, non vide et non ponctuel.

$\forall n \in \mathbf{N}$, on considère une fonction f_n définie sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$:

$$f_n : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & f_n(x) \end{array}$$

On va s'intéresser, dans un premier temps, à la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, puis dans un second temps à la série de fonctions $\sum f_n$.

1 Suites de fonctions : modes de convergence

Dans tout ce paragraphe, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ désigne une suite de fonctions de I dans $\mathbf{K}$ et f une fonction de I dans $\mathbf{K}$.

1.1 Convergence simple sur un intervalle

Definition 1.1

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur I lorsque $\forall x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$.

Ainsi $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur $I \iff \forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$

Traduction formelle :

$$\forall x \in I, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.1 En pratique

Pour étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$:

- on fixe $x \in I$
- on étudie la limite de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$.

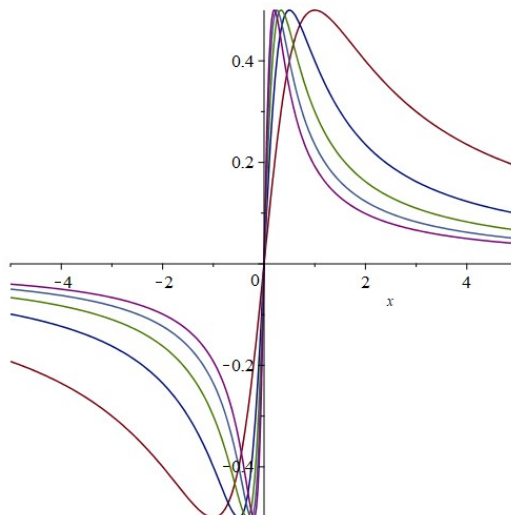
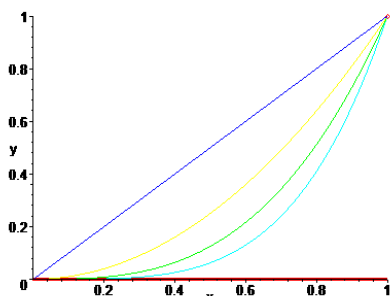
Par unicité de la limite de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ pour chaque x de I , la fonction f est la fonction définie par $\forall x \in I \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

On dit que f est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et on note $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

Exemple 1.1

Etude de la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, lorsque :

- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^n. \end{array}$
- $\forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n : \begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \end{array}$



On remarque que chaque fonction f_n est continue et pourtant la fonction f n'est pas continue. Donc la convergence simple est insuffisante pour transmettre les propriétés des fonctions f_n à la fonction f .

1.2 Convergence uniforme sur un intervalle

Remarque 1.2

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{K}$ bornée, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$, et si $M \in \mathbf{R}^+$ alors

$$\|f\|_\infty \leq M \iff \sup_{x \in I} |f(x)| \leq M \iff \forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M$$

Définition 1.2

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur I lorsque :

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists n_0 \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad f_n - f \text{ est bornée sur } I \\ \text{et} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \end{array} \right.$$

Ce qui revient à :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad n \geq n_0 \implies \forall x \in I, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Différence entre convergence simple et convergence uniforme :

Le rang n_0 , à partir duquel $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, ne dépend pas de x dans la définition de convergence uniforme, i.e. on peut trouver un rang n_0 qui est le même pour tous les x dans I , d'où le terme *uniforme*.

Exemple 1.2

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, où $f_n : x \mapsto x^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers

$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, mais pas uniformément vers f sur $[0, 1]$, ni sur $[0, 1[$. Mais $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $[0, a]$ avec $a \in]0, 1[$.

Proposition 1.1 *Lien entre convergence simple et convergence uniforme*

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I .

La réciproque est fautive comme le montre l'exemple précédent.

Mais en cas de convergence uniforme, f la limite simple est donc aussi la limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Deux remarques importantes :

- Une façon de montrer une convergence uniforme :

S'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, & |f_n(x) - f(x)| \leq a_n \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 \end{cases}$ alors

$\|f_n - f\|_\infty \leq a_n$ et par théorème d'encadrement on obtient que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

Dans cette propriété on a majoré $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité a_n indépendante de x (majoration uniforme).

- Une façon de montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I .

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$.

On en déduit que s'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur I .

Exemple 1.3

La suite (f_n) avec $f_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$ ne converge pas uniformément vers $f : x \mapsto 0$, en effet, soit $x_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n \geq 0$ et $f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$.

Definition 1.3 *Convergence uniforme sur tout segment*

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I lorsque quelque soit le segment $[a, b] \subset I$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Remarque 1.3

Attention : Si la convergence uniforme sur I de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f entraîne la convergence uniforme sur tout segment de I , la réciproque est fautive comme le montre l'exemple $f_n : x \mapsto x^n$ sur $[0, 1]$.

1.3 Récapitulatif pour l'étude d'une suite de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{K}$. On étudie :

d'abord la convergence simple :

On fixe x dans I et on étudie la limite de $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Si cette limite est finie, on note f la fonction $x \in I \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, f est la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

sur I .

puis la convergence uniforme :

• Pour montrer qu'il y a convergence uniforme :

- On majore $|f_n(x) - f(x)|$ pour tout x de I , par une quantité indépendante de x qui tend vers 0.

Ou

- On étudie les variations de $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ pour calculer $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ et on vérifie que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

• Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme :

- on étudie les variations de $x \mapsto |f_n(x) - f(x)|$ pour calculer $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$ et on vérifie que $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0.

Ou

- On exhibe une suite (x_n) d'éléments de I telle que $f(x_n) - f(x_n)$ ne tende pas vers 0.

Ou

- On montre qu'une propriété conservée par convergence uniforme n'est pas conservée sur l'exemple étudié.

Exemple 1.4

Etude de la convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment pour la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque :

$$\bullet f_n : \begin{matrix} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1 + nx^2} \end{matrix} \quad \bullet f_n : \begin{matrix} \mathbf{R}^+ & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & x^2 e^{-nx} \end{matrix}$$

2 Séries de fonctions : Modes de convergence

On définit les séries de fonctions à partir des suites de fonctions, comme on définit les séries numériques à partir des suites numériques.

Etant donné une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies de I dans $\mathbf{K}$, on lui associe la suite de fonctions

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de ses sommes partielles avec } S_n : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^n f_k(x) \end{matrix}$$

On note $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ et si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors on note

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$$

2.1 Convergence simple sur un intervalle

Definition 2.1 *Convergence simple*

On dit que la série de fonctions de terme général f_n , notée $\sum f_n$, **converge simplement** sur I lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I .

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $I \iff \forall x \in I$ la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

Dans ce cas :

- la limite S de la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **somme de la série**, c'est la fonction définie par : $\forall x \in I, \quad S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$.
- on note $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ le reste d'ordre n de la série de fonctions $\sum f_n$.
 $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une suite de fonctions de I dans $\mathbf{K}$.

Exemple 2.1

Déterminer le plus grand intervalle I sur lequel il y a convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Remarque 2.1 *Deux conditions nécessaires*

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I alors :

- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur I ,
- la suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge simplement vers la fonction nulle sur I .

Remarque 2.2

Toutes les définitions et propriétés ci-dessous s'étendent aux séries de fonctions $\sum_{n \geq n_0} f_n$, définies à partir d'un certain rang n_0 .

2.2 Convergence uniforme sur un intervalle

Definition 2.2 *Convergence uniforme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbf{K}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n f_k$.

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément sur** l'intervalle I lorsque la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I .

Proposition 2.1 *Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide de la suite des restes*

On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I . On note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ sa somme et $\forall n \in \mathbf{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ le reste d'ordre n .

$\sum f_n$ converge uniformément **ssi** la suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

Ce qui revient à

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty}^I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |R_n(x)| = 0 \text{ avec } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

Proposition 2.2

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

Proposition 2.3 *Lien entre convergence uniforme et convergence simple*

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I **alors** $\sum f_n$ convergence simplement sur I . *La réciproque est fausse.*

Exemple 2.2

- On pose $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : x \mapsto x^n - x^{n-1}$.

Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ mais pas uniformément sur $]0, 1[$.

- On pose $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge simplement et uniformément sur $[0, +\infty[$.

2.3 Convergence normale sur un intervalle**Definition 2.3** *Convergence normale*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbf{K}$.

On dit que la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur I lorsque

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n \text{ est bornée sur } I \\ \text{la série numérique } \sum \|f_n\|_{\infty}^I \text{ converge} \end{array} \right. \quad \text{où } \|f_n\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} |f_n(x)|.$$

Exemple 2.3

La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbf{R}$.

Remarque 2.3 *Caractérisation par majoration uniforme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbf{K}$. S'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels positifs telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq a_n \quad (\text{les termes } a_n \text{ tous indépendants de } x !)$$

alors $\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leq \|f_n\|_\infty \leq a_n$.

Par théorème de comparaison pour des séries à termes positifs, si la série numérique $\sum a_n$ converge alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I .

Exemple 2.4

La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{x^n(1-x)}{n^2 \ln(n)}$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Proposition 2.4 *Lien entre convergence normale et convergence uniforme*

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I alors $\sum f_n$ converge uniformément sur I .
La réciproque est fausse.

On a donc : *convergence normale $\implies$ convergence uniforme $\implies$ convergence simple*

Exemple 2.5

La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{x+n}$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ mais pas normalement.

2.4 Etude pratique de la convergence d'une série de fonctions

On souhaite étudier la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n : I \rightarrow \mathbf{K}$.

En général, on étudie d'abord la convergence simple et/ou la convergence normale :

- **la convergence simple :**

On fixe $x \in I$ et on étudie la convergence de la série numérique $\sum f_n(x)$.

- **la convergence normale :**

— On cherche une majoration du type $\forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq a_n$ avec a_n indépendant de x et avec $\sum a_n$ convergente.

ou

— On cherche $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ en étudiant les variations de $x \mapsto |f_n(x)|$ sur I et on regarde si $\sum \|f_n\|_\infty$ converge ou pas.

S'il y a convergence normale alors il y a convergence uniforme et convergence simple

- puis pour la convergence uniforme s'il n'y a pas convergence normale ou si on n'a pas réussi à prouver la convergence normale :

On travaille avec (R_n) la suite des restes après avoir démontré la convergence simple de

$$\sum f_n \text{ où } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k :$$

- Pour montrer que (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle, on cherche une majoration du type $\forall x \in I, |R_n(x)| \leq b_n$, b_n indépendant de x et $b_n \rightarrow 0$ (éventuellement par le critère spécial des séries alternées).
- Pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme, on peut chercher (x_n) une suite d'éléments de I telle que $(R_n(x_n))$ ne converge pas vers 0 ou telle que $(f_n(x_n))$ ne converge pas vers 0.

On peut aussi montrer que la somme de la série de fonctions $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ne vérifie pas une propriété qui se transmet par convergence uniforme.

Exemple 2.6 Fonction zêta de Riemann

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $f_n : \begin{matrix} \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{n^x} \end{matrix}$. On s'intéresse à la série de fonctions $\sum f_n$.

Pour x fixé dans $\mathbf{R}$, $\sum f_n(x)$ converge ssi $x > 1$, donc $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.

La série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]1, +\infty[$ mais sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.

Alors la fonction somme est notée $\zeta : \begin{matrix}]1, +\infty[& \rightarrow & \mathbf{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{matrix}$

3 Régularité de la limite uniforme d'une suite de fonctions

Dans tout ce paragraphe, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ désigne une suite de fonctions de I dans $\mathbf{K}$ et f une fonction de I dans $\mathbf{K}$.

3.1 Conservation de la continuité

Proposition 3.1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{K}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbf{K}$.

Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, f_n \text{ est continue sur } I \\ (f_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } I \end{cases}$ alors f est continue sur I .

La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Remarque 3.1

L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle, la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue, comme on l'a vu précédemment avec $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$.

Et on utilise souvent que si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ (limite simple) n'est pas continue sur I alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément (vers f) sur I .

Remarque 3.2 En pratique

La continuité en un point a est une notion locale, alors en pratique on vérifie la convergence uniforme sur tout segment, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

3.2 Intégration sur un segment

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbf{K}$.

$$\text{Si } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & f_n \text{ est continue sur } [a, b] \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [a, b] \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

L'hypothèse de convergence uniforme est essentielle :

Pour $n \geq 2$, on considère $f_n : x \in [0, 1] \mapsto nx(1 - x^2)^n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

3.3 Dérivation

Proposition 3.2 Classe C^1

Si

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I ,
- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur I ,
- la suite $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \rightarrow \mathbf{K}$

Alors

la fonction f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

On obtient de plus la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f sur tout segment inclus dans I .

Remarque 3.3

- Attention la convergence uniforme porte sur la suite des dérivées.
- Comme pour la continuité la dérivabilité en un point a est une notion locale, **donc en pratique**, on étudie la convergence uniforme de $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Proposition 3.3 *Extension aux fonctions de classe C^k*

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbf{K}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbf{K}$.

Si

- $\forall n \in \mathbf{N}$, f_n est de classe C^k sur I
- pour tout $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, les suites $(f_n^{(i)})_{n \in \mathbf{N}}$ convergent simplement sur I vers une fonction g_i (en notant
- la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I

Alors

la fonction f est de classe C^k sur I et $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $f^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(i)}$.

4 Régularité de la somme d'une série de fonctions par convergence uniforme

Les résultats sur les séries de fonctions sont analogues à ceux sur les suites de fonctions et se démontrent en se ramenant aux suites de fonctions.

Dans tout ce paragraphe, $\sum f_n$ est une série de fonctions de I dans $\mathbf{K}$.

4.1 Continuité de la fonction somme

Proposition 4.1

Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbf{N}, & f_n \text{ est continue sur } I \\ \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$ alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I .

Remarque 4.1

La continuité étant une notion locale, la convergence uniforme sur tout segment ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation suffit.

Exemple 4.1

1. La fonction zêta de Riemann est continue sur $]1, +\infty[$.

2. La fonction $\exp : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

4.2 Théorème d'inversion limite et $\sum$ (admis)

Soit $a \in \overline{\mathbf{R}}$ une extrémité de I .

$$\begin{array}{c}
 \text{Si} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 1) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \ell_n \in \mathbf{K} \\
 \text{et} \\
 2) \quad \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } I
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Alors} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 1) \quad \text{la série numérique } \sum \ell_n \text{ converge} \\
 \text{et} \\
 2) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

On ne peut pas remplacer I par tout segment inclus dans I , mais on peut remplacer I par un intervalle contenant l'extrémité a .

Exemple 4.2 La fonction zeta de Riemann

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.
 - La série de fonction $\sum f_n$ avec $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.
- On peut montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$ par une comparaison série-intégrale.

4.3 Intégration terme à terme sur un segment

$$\begin{array}{c}
 \text{Si} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 1) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad f_n \text{ est continue sur le segment } [a, b] \\
 2) \quad \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } [a, b]
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Alors} \\
 \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 1) \quad S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [a, b] \\
 2) \quad \text{la série numérique } \sum \int_a^b f_n(t) dt \text{ converge} \\
 3) \quad \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Il s'agit d'un théorème d'inversion entre $\sum$ et $\int$.

Exemple 4.3

Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$ en remarquant que $\frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x t^n dt$.

4.4 Fonctions de classe C^1 , de classe C^k , de classe C^∞ **Proposition 4.2** *Fonctions de classe C^1 (dérivation terme à terme)*

$$\begin{array}{c} \text{Si} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \\ 2) \quad \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \\ 3) \quad \sum f'_n \text{ converge uniformément sur } I \end{array} \right. \\ \text{Alors} \\ S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } S' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n \end{array}$$

Remarque 4.2

En pratique, la dérivabilité étant une notion locale, on vérifie la convergence uniforme de $\sum f'_n$ sur tout segment inclus dans I ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Proposition 4.3 *Fonctions de classe C^k*

$$\begin{array}{c} \text{Si} \\ \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \\ 2) \quad \forall j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket \quad \sum f_n^{(j)} \text{ converge simplement sur } I \\ 3) \quad \sum f_n^{(k)} \text{ converge uniformément sur } I \end{array} \right. \\ \text{Alors} \\ S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } C^k \text{ sur } I \text{ et } \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket \quad S^{(j)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)} \end{array}$$

En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $\sum f_n^{(k)}$ sur tout segment inclus dans I ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Remarque 4.3 *Fonctions de classe C^∞*

Si $\sum f_n$ est une série de fonctions qui converge simplement sur I , pour montrer que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur I , on montre que $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I .

Exemple 4.4 *Fonction zêta de Riemann*

Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

Puis montrer que ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$.