

Extrait de E3A MP 2013

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbf{C}^n$ définie pour $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ par :

$$\| (z_1, z_2, \dots, z_n) \|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|)$$

et on identifie le n -uplet $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$. Pour

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\| A \|_\infty$ la norme de A pour la norme subordonnée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ définie de la manière suivante :

$$\| A \|_\infty = \sup_{X \in \mathbf{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \| AX \|_\infty.$$

On admet que $A \mapsto \| A \|_\infty$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Enfin, pour $Z \in \mathbf{C}^n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on pose : $N_P(Z) = \| PZ \|_\infty$.

Rappelons que par définition la borne supérieure d'un ensemble de réels non vide majoré est le plus petit des majorants de cet ensemble et que la borne inférieure d'un ensemble non vide minoré est le plus grand des minorants de cet ensemble.

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On pose $m = \max_{1 \leq i \leq n} |m_{i,i}|$.

(a) Soit $Z \in \mathbf{C}^n$, notons $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Par produit matriciel $DZ = \begin{pmatrix} m_{1,1}z_1 \\ \vdots \\ m_{n,n}z_n \end{pmatrix}$.

On aura donc $\|DZ\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |m_{i,i}z_i|$.

Par définition de m et $\|Z\|_\infty$ on sait que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |m_{i,i}| \leq m$ et $|z_i| \leq \|Z\|_\infty$. Par produit d'inégalités positives on a donc :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |m_{i,i}z_i| = |m_{i,i}| \cdot |z_i| \leq m \|Z\|_\infty$$

et donc $\|DZ\|_\infty \leq m \|Z\|_\infty$.

(b) Par définition $\|D\|_\infty = \sup_{Z \in \mathbf{C}^n, \|Z\|_\infty \leq 1} \|DZ\|_\infty$.

• On déduit de la question précédente que si $Z \in \mathbf{C}^n$ avec $\|Z\|_\infty \leq 1$, on a $\|DZ\|_\infty \leq m$ donc $\|D\|_\infty \leq m$.

- De plus il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $m = |m_{k,k}|$, alors en notant E_k le $k^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{C}^n$, on a $\|E_k\|_\infty = 1 \leq 1$, $DE_k = m_{k,k}E_k = mE_k$ et donc $\|DE_k\|_\infty = |m| \cdot \|E_k\|_\infty = m$. On en déduit que $\|D\|_\infty \geq m$.

Autre méthode : Soit $z = (1, \dots, 1) \in \mathbf{C}^n$ alors $DZ = \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{nn} \end{pmatrix}$ et
 $\|DZ\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|m_{i,1}|, \dots, |m_{i,n}|) = m$ or $\|Z\|_\infty = 1 \leq 1$ donc $\|D\|_\infty \geq m$.

Finalement $\|D\|_\infty = m$

2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Montrons d'abord que $\forall Y \in \mathbf{C}^n \quad \|AY\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|Y\|_\infty$:

Pour $X \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|X\|_\infty \leq 1$, par définition $\|AX\|_\infty \leq \|A\|_\infty$.

Pour $Y \in \mathbf{C}^n$ avec $Y \neq 0$ on a $X = \frac{1}{\|Y\|_\infty} Y$ vérifie, par homogénéité de la norme,

$\|X\|_\infty = \frac{1}{\|Y\|_\infty} \cdot \|Y\|_\infty = 1 \leq 1$. On obtient alors :

$$\|AY\|_\infty = \|(\|Y\|_\infty \cdot AX)\|_\infty = \|Y\|_\infty \cdot \|AX\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|Y\|_\infty$$

Pour $Y = 0$ on a $\|AY\|_\infty = 0 = \|Y\|_\infty$ donc finalement

$$\forall Y \in \mathbf{C}^n \quad \|AY\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|Y\|_\infty$$

Ce qui nous permet d'écrire pour $X \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|X\|_\infty \leq 1$, puisque $\|A\|_\infty \geq 0$:

$$\|ABX\|_\infty \leq \|A\|_\infty \cdot \|BX\|_\infty \leq \|A\|_\infty \times \|B\|_\infty$$

Alors par définition de borne supérieure, on obtient finalement

$$\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \times \|B\|_\infty$$

3. (a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

- Pour $Z \in \mathbf{C}^n$, par positivité de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $N_P(Z) = \|PZ\|_\infty \in \mathbf{R}^+$.

- Pour $Z \in \mathbf{C}^n$ et $\lambda \in \mathbf{C}$, par homogénéité de la norme $\|\cdot\|_\infty$,

$$N_P(\lambda \cdot Z) = \|P(\lambda Z)\|_\infty = \|\lambda(PZ)\|_\infty = |\lambda| \cdot \|PZ\|_\infty = |\lambda| N_P(Z)$$

- Pour Z et X dans $\mathbf{C}^n$, par inégalité triangulaire sur la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a :

$$N_P(Z + X) = \|P(Z + X)\|_\infty = \|PZ + PX\|_\infty \leq \|PZ\|_\infty + \|PX\|_\infty$$

donc $N_P(Z + X) \leq N_P(Z) + N_P(X)$.

- On déduit des points précédents que N_P est une norme sur $\mathbf{C}^n$ si, et seulement si, elle vérifie la séparation : $\forall Z \in \mathbf{C}^n, \quad N_P(Z) = 0 \iff Z = 0$.

Soit $Z \in \mathbf{C}^n$. Puisque $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbf{C}^n$ on sait que :
 $N_P(Z) = 0 \iff \|PZ\|_\infty = 0 \iff PZ = 0$. On en déduit que

$$(N_P(Z) = 0 \iff Z = 0) \iff (PZ = 0 \iff Z = 0)$$

$$\iff \text{Ker}(P) = \{0_{\mathbf{C}^n}\}$$

Et puisque $\mathbf{C}^n$ est de dimension finie $\text{Ker}(P) = \{0_{\mathbf{C}^n}\} \iff P$ est inversible. On a donc

$$(N_P(Z) = 0 \iff Z = 0) \iff P \text{ est inversible}$$

On a bien N_P est une norme sur $\mathbf{C}^n$ ssi P est une matrice inversible.

Lorsque P est inversible, on notera dorénavant $\|\cdot\|_P$ pour N_P et la norme subordonnée à la norme $\|\cdot\|_P$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ sera notée $\|\cdot\|_P$.

(b) On se donne une matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, par définition

$$\|A\|_P = \sup_{Y \in \mathbf{C}^n, \|Y\|_P \leq 1} \|AY\|_P = \sup_{Y \in \mathbf{C}^n, \|PY\|_\infty \leq 1} \|PAY\|_\infty$$

$$\text{et } \|PAP^{-1}\|_\infty = \sup_{X \in \mathbf{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}X\|_\infty.$$

1ère rédaction :

• Soit $X \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|X\|_\infty \leq 1$.

$Y = P^{-1}X$ vérifie $Y \in \mathbf{C}^n$, $\|Y\|_P = \|PY\|_\infty = \|X\|_\infty \leq 1$ donc

$$\|PAP^{-1}X\|_\infty = \|PAY\|_\infty = \|PAY\|_P \leq \|A\|_P$$

Par définition de borne supérieure, on obtient $\|PAP^{-1}\|_\infty \leq \|A\|_P$.

• Soit $Y \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|Y\|_P \leq 1$.

$X = PY$ vérifie $X \in \mathbf{C}^n$ et $\|X\|_\infty = \|Y\|_P \leq 1$ donc

$$\|AY\|_P = \|PAY\|_\infty = \|PAP^{-1}X\|_\infty \leq \|PAP^{-1}\|_\infty$$

Par définition de borne supérieure on obtient : $\|A\|_P \leq \|PAP^{-1}\|_\infty$.

Par double inégalité on a finalement

$$\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty$$

2nde rédaction :

Par définition :

$$\|A\|_P = \sup_{Y \in \mathbf{C}^n, \|Y\|_P \leq 1} \|AY\|_P$$

$$= \sup \{ \|AY\|_P, \quad Y \in \mathbf{C}^n \text{ et } \|Y\|_P \leq 1 \}$$

$$\|A\|_P = \sup \{ \|PAY\|_\infty, \quad Y \in \mathbf{C}^n \text{ et } \|PY\|_\infty \leq 1 \}$$

et aussi

$$\|PAP^{-1}\|_{\infty} = \sup_{X \in \mathbf{C}^n, \|X\|_{\infty} \leq 1} \|PAP^{-1}X\|_{\infty} = \sup \{ \|PAP^{-1}X\|_{\infty}, \quad X \in \mathbf{C}^n \text{ et } \|X\|_{\infty} \leq 1 \}$$

P étant une matrice inversible, $X = PY \iff Y = P^{-1}X$ et pour $Y = P^{-1}X$ on a : $\|Y\|_P = \|PY\|_{\infty} = \|X\|_{\infty}$. On en déduit que l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \{X \in \mathbf{C}^n, & \|X\|_{\infty} \leq 1\} & \rightarrow \{Y \in \mathbf{C}^n, & \|Y\|_P \leq 1\} \\ X & \mapsto & P^{-1}X \end{array}$$

est une application bijective. Et pour $Y = P^{-1}X$, $\|PAY\|_{\infty} = \|PAP^{-1}X\|_{\infty}$ donc

$$\{\|PAP^{-1}X\|_{\infty}, \quad X \in \mathbf{C}^n \text{ et } \|X\|_{\infty} \leq 1\} = \{\|PAY\|_{\infty}, \quad Y \in \mathbf{C}^n \text{ et } \|Y\|_P \leq 1\}$$

donc $\boxed{\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_{\infty}.$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\text{sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M et on définit $\rho(M)$ par : $\rho(M) = \max\{|\mu|, \mu \in \text{sp}(M)\}$.

(a) Soit $P \in GL_n(\mathbf{C})$.

1ère méthode : rapide

A et PAP^{-1} sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres.

En effet en notant χ_A et $\chi_{PAP^{-1}}$ les polynômes caractéristiques de A et PAP^{-1} on a :

$$\forall x \in \mathbf{C} \quad \chi_{PAP^{-1}}(x) = \det(xI_n - PAP^{-1}) = \det(P(xI_n - A)P^{-1}) = \det(P) \cdot \chi_A(x) \cdot \det(P^{-1}) = \chi_A(x)$$

$\text{sp}(A) = \text{sp}(PAP^{-1})$ donc $\boxed{\rho(A) = \rho(PAP^{-1})}$

2nde méthode : plus longue

- Si $\mu \in \text{sp}(A)$ alors il existe $X \in \mathbf{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \mu X$, alors

$$PAP^{-1}(PX) = PAX = P(\mu X) = \mu PX$$

puisque P est inversible on a $PX \neq 0$ et donc μ est une valeur propre de PAP^{-1} . On a donc $\text{sp}(A) \subset \text{sp}(PAP^{-1})$.

- Si $\mu \in \text{sp}(PAP^{-1})$ alors il existe $X \in \mathbf{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $PAP^{-1}X = \mu X$ alors $AP^{-1}X = P^{-1}(\mu X) = \mu \cdot P^{-1}X$ et $P^{-1}X \neq 0$ donc μ est une valeur propre de A . On a donc $\text{sp}(PAP^{-1}) \subset \text{sp}(A)$.

Par double inclusion $\text{sp}(A) = \text{sp}(PAP^{-1})$ et donc $\boxed{\rho(A) = \rho(PAP^{-1})}$

(b) Soit $P \in GL_n(\mathbf{C})$.

1ère méthode :

Soit $\mu \in \text{sp}(A)$, on a déjà vu que $\text{sp}(A) = \text{sp}(PAP^{-1})$ donc il existe $Y \in \mathbf{C}^n$ tel que $Y \neq 0$ et $PAP^{-1}Y = \mu Y$, alors $\|PAP^{-1}Y\|_\infty = |\mu| \cdot \|Y\|_\infty$.

On a aussi vu dans la réponse à la question 2 que $\|PAP^{-1}Y\|_\infty \leq \|PAP^{-1}\|_\infty \cdot \|Y\|_\infty$ donc cela donne $|\mu| \cdot \|Y\|_\infty \leq \|PAP^{-1}\|_\infty \cdot \|Y\|_\infty$. Y est un vecteur non nul donc $\|Y\|_\infty > 0$ et donc $|\mu| \leq \|PAP^{-1}\|_\infty$.

Puisque $\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty$, on a obtenu : $\forall \mu \in \text{sp}(A) \quad |\mu| \leq \|A\|_P$ et donc

$$\rho(A) \leq \|A\|_P.$$

2nde méthode :

$\rho(PAP^{-1}) = \max_{\lambda \in \text{sp}(PAP^{-1})} |\lambda|$, donc il existe $\mu \in \text{sp}(PAP^{-1})$ tel que

$\rho(A) = \rho(PAP^{-1}) = |\mu|$ et il existe $X \in \mathbf{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $PAP^{-1}X = \mu X$, alors $Y = \frac{X}{\|X\|_\infty}$ vérifie $\|Y\|_\infty = 1$ et

$$PAP^{-1}Y = PAP^{-1} \left(\frac{X}{\|X\|_\infty} \right) = \frac{1}{\|X\|_\infty} PAP^{-1}X = \frac{\mu}{\|X\|_\infty} X = \mu Y$$

Donc $\|PAP^{-1}Y\|_\infty = |\mu| \cdot \|Y\|_\infty = |\mu|$.

On a donc trouvé $Y \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|Y\|_\infty \leq 1$ et $\|PAP^{-1}Y\|_\infty = |\mu| = \rho(A)$, par définition de borne supérieure, on a alors $\rho(A) \leq \|PAP^{-1}\|_\infty$ et par application de la

question 3(b) : $\rho(A) \leq \|A\|_P$.

(c) On suppose A diagonalisable. Il existe donc $Q \in GL_n(\mathbf{C})$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que

$$A = Q \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}.$$

$$\text{Notons } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P = Q^{-1}, \text{ on a } \|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|D\|_\infty \text{ et}$$

par le résultat de la question 1(b), on sait que $\|D\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k| = \rho(D) = \rho(A)$, alors $\|A\|_P = \rho(A)$.

On a obtenu l'existence de $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$.

(d) Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Cherchons les valeurs propres de A :

$$\lambda \in \text{sp}(A) \iff \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = 0.$$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ \lambda - 1 & \lambda & 0 \\ \lambda - 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix}$$

Par développement par rapport à la première colonne, on obtient

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda(\lambda + 1) + 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) = (\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda - j^2)$$

avec $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. Donc $\boxed{\rho(A) = \max_{\mu \in \text{sp}(A)} |\mu| = \max\{|1|, |j|, |j^2|\} = 1.}$

χ_A , le polynôme caractéristique de A , est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et chaque sous-espace propre de A est de dimension 1.

• On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $E_1(A) = \text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

• On remarque que $A \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j^2 \\ j^3 \\ j^4 \end{pmatrix} = j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ alors

$$E_{j^2}(A) = \text{Ker}(A - j^2 I_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \right).$$

•

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - j I_3) \iff \begin{pmatrix} -j & 0 & 1 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -jx + z = 0 \\ x - jy = 0 \\ y - jz = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - jI_3) &\iff \begin{cases} z = jx \\ x = jy \\ y = jz \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = jx \\ y = jz = j^2x & \text{or } j^3 = 1 \\ x = jy = j^3x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = jx \\ y = j^2x \end{cases} \\
&\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$E_j(A) = \text{Ker}(A - jI_3) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \right).$$

On sait alors que $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ vérifie $A = Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$ et d'après ce qui a été fait en question 4(c), on sait qu'une matrice $P \in GL_3(\mathbf{C})$ telle que $\rho(A) = \|A\|_P$ est $P = Q^{-1}$.

L'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_3(\mathbf{C})$ telle que $1 = \rho(A) = \|A\|_P$ est

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

(e) Un exemple. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ définie par : $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = j$.

1ère méthode : à savoir reproduire

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la $j^{\text{ième}}$ colonne de A est $C_j = \begin{pmatrix} j \\ \vdots \\ j \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = jC_1$ alors $\text{rg}(A) = 1$ et par le théorème du rang $\dim \text{Ker}(A) = n - 1$.

0 est donc valeur propre de A de multiplicité au moins égale à $n - 1$, on en déduit que χ_A le polynôme caractéristique de A se factorise par X^{n-1} , mais on sait aussi que $\chi_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$ donc

$$\chi_A = X^{n-1}(X - \text{Tr}(A)) = X^{n-1} \left(X - \sum_{k=1}^n k \right) = X^{n-1} \left(X - \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

On a donc $\text{sp}(A) = \left\{ 0, \frac{n(n+1)}{2} \right\}$ et $\rho(A) = \frac{n(n+1)}{2}$.

• La valeur propre $\lambda = \frac{n(n+1)}{2}$ est simple donc le sous-espace propre associé

$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est de dimension 1, or on remarque que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n j \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_\lambda(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

• $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \iff AX = 0 \iff x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 0$, on a donc

$$X \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \iff X = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $E_0(A) = \text{Ker}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$

Par le résultat de la question 4(c), l'inverse P^{-1} d'une matrice $P \in GL_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\rho(A) = \|A\|_P \text{ est } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \dots & -n \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2nde méthode : si on n'a pas vu le rang de A

Par produit matriciel en notant $A^2 = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on a

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^n kj = j \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} j = \frac{n(n+1)}{2} a_{ij}$$

Donc $A^2 = \frac{n(n+1)}{2} A$ et $X^2 - \frac{n(n+1)}{2} X = X \left(X - \frac{n(n+1)}{2} \right)$ est un polynôme annulateur de A scindé à racines simples, on en déduit que A est diagonalisable avec $\text{sp}(A) \subset \left\{ 0, \frac{n(n+1)}{2} \right\}$ et $\text{sp}(A) \neq \emptyset$. $A \neq O_n$ alors 0 ne peut pas être la seule valeur

propre de A et $A \neq \frac{n(n+1)}{2}I_n$ alors $\frac{n(n+1)}{2}$ ne peut pas être la seule valeur propre de A . On en déduit que $\text{sp}(A) = \left\{0, \frac{n(n+1)}{2}\right\}$.

Arrivé ici, soit on recherche directement les deux sous-espaces propres par résolution du système $(A - \lambda I_n)X = 0$ avec $\lambda \in \text{sp}(A)$, soit on va d'abord un peu plus loin en cherchant la dimension de chaque sous-espace propre.

En effet, A étant diagonalisable, la somme de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité est égale à la trace de A , donc en notant k et p les multiplicités respectives des valeurs propres 0 et $\frac{n(n+1)}{2}$, on a :

$$k \times 0 + p \times \frac{n(n+1)}{2} = \text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

donc $p = 1$ et $E_{\frac{n(n+1)}{2}}(A) = \text{Ker}\left(A - \frac{n(n+1)}{2}I_n\right)$ est de dimension 1, puis $\dim \text{Ker}(A) = n - \dim E_{\frac{n(n+1)}{2}}(A) = n - 1$. On termine comme dans la méthode précédente.

5. Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Soit donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

(a) On pose $m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$.

Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$, par définition $\|Z\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|)$.

$$AZ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}$$

donc par définition $\|AZ\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|)$, or $|z_1| \leq \|Z\|_\infty$ et $|z_2| \leq \|Z\|_\infty$ alors

$$|az_1 + bz_2| \leq |a||z_1| + |b||z_2| \leq (|a| + |b|)\|Z\|_\infty \leq m \|Z\|_\infty$$

$$|cz_1 + dz_2| \leq |c||z_1| + |d||z_2| \leq (|c| + |d|)\|Z\|_\infty \leq m \|Z\|_\infty$$

On a donc $\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$.

• Soit $Z \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|Z\|_\infty \leq 1$, on a $\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty \leq m$, alors par définition de borne supérieure $\|A\|_\infty \leq m$.

• On suppose que $m = |a| + |b|$, alors $|c| + |d| \leq |a| + |b|$.

Soit $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ avec $z_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ \frac{\bar{a}}{|a|} & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$ et $z_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } b = 0 \\ \frac{\bar{b}}{|b|} & \text{si } b \neq 0 \end{cases}$ on a $|z_1| \in \{0, 1\}$

et $|z_2| \in \{0, 1\}$ donc $\|Z\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|) \leq 1$ et

$$\|AZ\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|)$$

avec

$$az_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 0 \\ \frac{a\bar{a}}{|a|} & \text{si } a \neq 0 \end{cases} = |a| \text{ et de même } bz_2 = |b|$$

Donc $|az_1 + bz_2| = ||a| + |b|| = |a| + |b| = m$.

De plus $|cz_1 + dz_2| \leq |c| \cdot |z_1| + |d| \cdot |z_2| \leq |c| + |d| \leq m$.

On a donc trouvé un vecteur $Z \in \mathbf{C}^n$ tel que $\|Z\|_\infty \leq 1$ et $\|AZ\|_\infty = m$. On en déduit que $\|A\|_\infty \geq m$.

• Si $m = |c| + |d|$, en reprenant les formules précédentes avec échange entre a et c et b et d , on a aussi dans ce cas $\|A\|_\infty \geq m$.

Finalement on a obtenu : $\|A\|_\infty \leq m$ et $\|A\|_\infty \geq m$, donc $\|A\|_\infty = m = \max(|a| + |b|, |c| + |d|)$

(b) On suppose la matrice non diagonalisable et on note f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ canoniquement associé à A .

i. A est à coefficients complexes donc χ_A son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{C}$ et donc A admet au moins une valeur propre.

Si $\text{Sp}(A)$ contenait deux éléments alors χ_A serait scindé à racines simples et A serait diagonalisable, ce qui n'est pas le cas ici.

On en déduit que $\text{sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément. On le note α .

ii. 1ère méthode :

α est l'unique valeur propre de A et χ_A , son polynôme caractéristique, est scindé alors on sait que A est trigonalisable et plus précisément A est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres

de A , ce qui revient à l'existence d'une base e de $\mathbf{C}^n$ telle que $\text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

avec $\beta \in \mathbf{C}$.

Il existe bien une base e de $\mathbf{C}^2$ telle que : $\text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathbf{C}$.

2nde méthode :

α est l'unique valeur propre de A , alors il existe un vecteur non nul $u \in \mathbf{C}^2$ tel que $f(u) = \alpha u$. (u) est alors une famille libre de $\mathbf{C}^2$ que l'on peut compléter en une

base $e = (u, v)$ de $\mathbf{C}^2$. La matrice de f dans cette base est $\text{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$

avec $(\beta, \gamma) \in \mathbf{C}^2$. Comme $\chi_A = (X - \alpha)^2 = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$, on sait que $\text{Tr}(A) = 2\alpha = \alpha + \gamma$ et donc $\gamma = \alpha$.

Il existe bien une base e de $\mathbf{C}^2$ telle que : $Mat_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\beta \in \mathbf{C}$.

iii. Soit $\varepsilon > 0$.

On reprend $e = (u, v)$ base de $\mathbf{C}^2$ telle que $Mat_e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, on a $\beta \neq 0$ car

f n'est pas diagonalisable. $e' = (u', v)$, avec $u' = \frac{\beta}{\varepsilon}u$, est toujours une base de $\mathbf{C}^2$

puisque u' est non nul et colinéaire à u , de plus $\begin{cases} Au' = A\left(\frac{\beta}{\varepsilon}u\right) = \frac{\beta}{\varepsilon}\alpha u = \alpha u' \\ Av = \alpha v + \beta u = \alpha v + \varepsilon u' \end{cases}$,

donc la matrice de f dans la base e' est $Mat_{e'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, que l'on peut aussi

écrire $\begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $|\beta'| \leq \varepsilon$.

iv. Notons P la matrice de passage de la base e' à la base canonique de $\mathbf{C}^2$, on sait que

$P \in GL_2(\mathbf{C})$ et $P.A.P^{-1} = T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $|\beta'| \leq \varepsilon$.

On a alors $\|A\|_P = \|PAP^{-1}\|_\infty = \|T\|_\infty$, et par le résultat de la question 5(a)

$$\|A\|_P = \|T\|_\infty = \max(|\alpha|, |\beta'| + |\alpha|) = |\alpha| + |\beta'| = \rho(A) + |\beta'| \leq \rho(A) + \varepsilon$$

Il existe bien une matrice $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que : $\|A\|_P \leq \rho(A) + \varepsilon$.

- (c) • D'après la question 4(c), si A est diagonalisable alors il existe $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que $\|A\|_P = \rho(A)$ et d'après la question 5(b), si A n'est pas diagonalisable alors $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ tel que $\|A\|_P \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Finalement dans tous les cas : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que $\|A\|_P \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Ce qui signifie que $\forall \varepsilon > 0 \quad \rho(A) + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $\{\|A\|_P, P \in GL_2(\mathbf{C})\}$.

- D'après la question 4(b) $\forall P \in GL_2(\mathbf{C}) \quad \rho(A) \leq \|A\|_P$, donc $\rho(A)$ est un minorant de $\{\|A\|_P, P \in GL_2(\mathbf{C})\}$.

On a donc obtenu que $\rho(A)$ est le plus grand des minorants de $\{\|A\|_P, P \in GL_2(\mathbf{C})\}$

et donc $\inf_{P \in GL_2(\mathbf{C})} \|A\|_P = \rho(A)$.

- (d) Un exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

- Par 5(a), on sait que $\|A\|_\infty = \max(|-3| + |8|, |-2| + |5|) = 11$.

- On sait que le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + (-15 + 16) = (X - 1)^2$$

donc A admet l'unique valeur propre 1 et $A \neq I_3$ donc A n'est pas diagonalisable. On a $\rho(A) = |1| = 1$ alors en prenant $\varepsilon = 1$ la question 5(b) iv donne

l'existence d'une matrice $P \in GL_2(\mathbf{C})$ telle que $\|A\|_P \leq 2$.

- (e) On suppose $\rho(A) < 1$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) < \rho(A) + \varepsilon < 1$. Et par question 5(b) iv, il existe une matrice P de $GL_2(\mathbf{C})$ telle que $\|A\|_P \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$.

$$\|A^2\|_P = \|PA^2P^{-1}\|_\infty = \|(PAP^{-1}).(PAP^{-1})\|_\infty$$

alors par la question 2 on a

$$\|A^2\|_P \leq \|PAP^{-1}\|_\infty^2$$

Ce qui donne $\|A^2\|_P \leq \|A\|_P^2$.

En utilisant $PA^{n+1}P^{-1} = (PA^nP^{-1}).(PAP^{-1})$, on obtient par récurrence que :
 $\forall n \geq 2, \quad 0 \leq \|A^n\|_P \leq \|A\|_P^n$.

Puisque $\|A\|_P < 1$, la suite géométrique $(\|A\|_P^n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0 et par théorème d'encadrement on obtient que la suite numérique $(\|A^n\|_P)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0, donc la suite de matrices (A^n) converge vers la matrice nulle pour la norme $\|\cdot\|_P$. Puisque

$M_2(\mathbf{C})$ est de dimension finie, si $\rho(A) < 1$ alors la suite (A^n) converge vers la matrice nulle.

Fin du corrigé