

Exercice 1

Étudier la convergence simple puis uniforme sur $]0, 1[$ de la suite de fonctions (f_n) avec $f_n : x \mapsto x^{2n+1} \ln(x)$.

Exercice 2

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-x}}{1 + n^2 x^2}.$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) .
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[0, +\infty[$.
3. Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[\alpha, +\infty[$.
4. Convergence de la suite (u_n) avec $u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$?

Exercice 3

Soit (f_n) une suite de fonctions définie sur $\mathbf{R}^+$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in \mathbf{R}^+ \quad f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement sur $\mathbf{R}^+$ vers une fonction g .
2. Montrer que (f_n) converge uniformément vers g .
3. Justifier que $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Comparez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ et $\int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$.

Exercice 4

1. Soit $p \in \mathbf{N}^*$, f une fonction de classe C^p sur un segment $[a, b]$. On note $L_1, \dots, L_p$ les polynômes d'interpolations de Lagrange associés à des réels distincts $a_1 < \dots < a_p$ de $[a, b]$.

On pose $\Pi(f) = \sum_{i=1}^p f(a_i) L_i$. On fixe x dans $[a, b] \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$.

- (a) Déterminer un réel λ tel que la fonction $F : t \mapsto f(t) - \Pi(f)(t) - \lambda \prod_{k=1}^p (t - a_k)$ s'annule en x .

- (b) Justifier qu'il existe $c_x \in]a, b[$ tel que $f(x) - \Pi(f)(x) = \frac{f^{(p)}(c_x)}{p!} \prod_{k=1}^p (x - a_k)$.

- (c) En déduire que $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \Pi(f)| \leq \frac{M_p (b-a)^p}{p!}$ avec $M_p = \sup_{x \in [a, b]} |f^{(p)}(x)|$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on considère des réels distincts $a_{1,n} < \dots < a_{n,n}$ d'un segment $[a, b]$ et $L_{1,n}, \dots, L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associés à ces réels. On pose

$$P_n = \sum_{i=1}^n e^{a_{i,n}} L_{i,n}.$$

Montrer que la suite $(P_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction exponentielle.

Exercice 5

Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n(x) = \frac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}$.

1. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $\mathbf{R}$?
2. Étude de la convergence uniforme de (f_n) .
3. Étude de la convergence simple de $\sum f_n$.
4. Étude de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $\mathbf{R}^*$.
5. Étude de la continuité de $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Exercice 6

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une application f continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Étudier la dérivabilité de f sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ par $\forall x > 0 \quad u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

On définit alors la fonction $\varphi : x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ telle que la série $\sum \varepsilon_n$ converge absolument et $\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n$.
3. En déduire que la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.
4. Montrer que φ vérifie les conditions suivantes :
 - φ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$,
 - $\forall x > 0 \quad \varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$,
 - φ' est croissante sur $]0, +\infty[$,
 - $\varphi(1) = 0$.

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$.

1. Déterminer la domaine de définition de f .
2. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.
3. Justifier que f admet une limite en $+\infty$ et calculer cette limite.
4. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \frac{e^x}{e^x - 1}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 9

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Trouver les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.