1 Suites et séries de fonctions intégrables

1.1 Théorème de convergence dominée

Proposition 1.1 *Théorème de convergence dominée*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions toutes définies sur I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{K}$, avec I un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$.

Soit $f : I \to \mathbf{K}$.

Si :

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est continue par morceaux sur l'intervalle I.
- $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent simplement sur I vers la fonction f.
- f est continue par morceaux sur I
- ***Hypothèse de domination*** : il existe une fonction φ de $L^1(I, \mathbf{R}^+)$ (*indépendante de n*) vérifiant :
$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors :

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est intégrable sur I ,
- f est intégrable sur I
- $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \int_I f(t)\mathrm{d}t.$

Exemple 1.1

1. Déterminer la limite de la suite (I_n) définie par $\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t}{n}\right)^n e^{-2t}\mathrm{d}t.$
2. Déterminer la limite de $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$ lorsque n tend vers l'infini.

1.2 Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions toutes définies sur I et à valeurs dans $\mathbf{K}$, avec I un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$: $I =]a, b]$, ou $[a, b[$ ou $[a, b]$ ou $]a, b[$.

Si

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n \in L^1(I, \mathbf{K})$ (f_n *intégrable sur* I),
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I,
- la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I,
- la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge

Alors

- la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I,
- la série numérique $\sum \int_I f_n$ converge et $\boxed{\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t.}$

Exemple 1.2

- Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(= -\frac{\pi^2}{6}\right)$.
- Attention, le théorème précédent peut ne pas s'appliquer et dans ce cas on peut se ramener au théorème de convergence dominée sur la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2 Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Soit une fonction $f : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbf{K} \\ (x,t) & \mapsto & f(x,t) \end{array}$, avec A et I des intervalles de $\mathbf{R}$, .

On pose $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ sous réserve d'existence de l'intégrale.

$F(x)$ est une intégrale à paramètre, le paramètre étant x, t étant la variable d'intégration, I étant l'intervalle d'intégration $[a,b]$ ou $]a,b]$ ou $[a,b[$ ou $]a,b[$.

Exemple 2.1 *Fonction* Γ *d'Euler*

On note $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

2.1 Théorème de continuité

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$, I intervalle quelconque.

Si

- pour tout t de I, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I
- ***Hypothèse de domination :*** il existe une fonction $\varphi \in L^1(I, \mathbf{R}^+)$ (*indépendante de x*) telle que : $\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$

Alors

- pour tout x de A, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et
- la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Exemple 2.2

1. Pour $x \geqslant 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\mathrm{d}t$. Vérifier que F est définie et continue sur $\mathbf{R}^+$.
2. Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

Il est parfois difficile de trouver une fonction φ qui domine f sur tout l'intervalle A. On peut alors se restreindre à une version localisée du théorème précédent (la continuité étant une notion locale) :

Dans la pratique, on remplace la troisième hypothèse (hypothèse de domination) par l'hypothèse suivante :

Hypothèse de domination sur tout segment :
Pour tout segment $[\alpha, \beta] \subset A$ (ou tout intervalle adapté à la situation), il existe une fonction $\varphi_{\alpha,\beta} \in L^1(I, \mathbf{R}^+)$ (*indépendante de x*) telle que : $\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_{\alpha,\beta}(t)$

La conclusion du théorème de continuité reste valable :
$\forall x \in A, \quad t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I et la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Exemple 2.3 *Fonction Γ d'Euler*

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est continue sur son domaine de définition.

2.2 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$ et soit a une borne de A.

Si

- pour tout t de I, $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = \ell(t)$;

- pour tout x de A, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continue par morceaux sur I

- ***Hypothèse de domination :*** il existe une fonction $\varphi \in L^1(I, \mathbf{R}^+)$, telle que :
$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

alors

- la fonction $\ell : t \mapsto \ell(t)$ est intégrable sur I et
- $\lim\limits_{x \to a} \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\mathrm{d}t$

Exemple 2.4

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\mathrm{d}t$.

2.3 Théorème de dérivation sous le signe $\int$

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$, avec A et I des intervalles de $\mathbf{R}$.

Dérivée partielle d'ordre 1 :

Soit $t \in I$ fixé, notons $f_t : \begin{array}{l} A \to \mathbf{K} \\ x \mapsto f(x,t) \end{array}$.

Lorsque f_t est dérivable sur A, $f_t'(x)$ se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, la dérivée partielle par rapport à x de f en (x,t). Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = f_t'(x)$.

En pratique : pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, on fixe t et on dérive par rapport à x.

Dérivées partielles d'ordre supérieur :

Avec les notations précédentes, pour $f \in \mathbf{N}$, on note $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = f_t^{(k)}(x)$.

En pratique : on fixe t et on dérivée k fois par rapport à x.

Théorème de dérivation :

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$.

Si

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A ;
- pour tout x de A, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- ***Hypothèse de domination sur*** $\dfrac{\partial f}{\partial x}$: il existe une fonction $\psi \in L^1(I, \mathbf{R}^+)$ (*indépendante de* x), telle que : $\forall (x,t) \in A \times I \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi(t)$

Alors

la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur A avec

$$\forall x \in A, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t \qquad (\textit{Formule de Leibniz}).$$

Comme pour le théorème de continuité, on peut remplacer l'hypothèse de domination par une **Hypothèse de domination sur tout segment** ou tout intervalle adapté à la situation : Pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\psi_{a,b} \in L^1(I, \mathbf{R}^+)$ (*indépendante de* x) telle que : $\forall (x,t) \in [a,b] \times I, \quad \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \psi_{a,b}(t)$

Exemple 2.5

1. Montrer que $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, et calculer F' .
2. Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur son domaine de définition, et déterminer Γ'.

2.4 Extension à la classe C^k et la classe C^∞

Soit $f : \begin{array}{l} A \times I \to \mathbf{K} \\ (x,t) \mapsto f(x,t) \end{array}$, avec A et I des intervalles de $\mathbf{R}$ et soit $k \geqslant 2$.

Si

- $\forall t \in I, \quad x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur A ;
- ***Dérivées intermédiaires*** : $\forall x \in A \quad \forall j \in [\![0, k-1]\!]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I ;

- $\forall x \in A,\ t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- ***Hypothèse de domination de la dérivée partielle d'ordre k*** : il existe une fonction $\varphi_k \in L^1(I, \mathbf{R}^+)$ (indépendante de x), telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_k(t)$$

Alors

> la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^k sur A avec
>
> $$\forall j \in [\![1,k]\!] \quad \forall x \in A, \quad F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\mathrm{d}t \qquad (\textit{Formule de Leibniz}).$$

Comme pour le théorème de classe C^1, on peut remplacer l'hypothèse de domination par une **Hypothèse de domination sur tout segment** : Pour tout segment $[a,b] \subset A$, il existe une fonction $\psi_{k,a,b} \in L^1(I, \mathbf{R}^+)$ (*indépendante de* x) , telle que : $\quad \forall (x,t) \in [a,b] \times I,\quad \left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant \varphi_{k,a,b}(t)$

En pratique pour montrer que $F : t \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est de classe C^∞ sur A, on montre l'hypothèse de domination sur tout segment pour $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Exemple 2.6

Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.