Problème 1 : Fonction zeta de Riemann et zeta alternée

On admet qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I - Fonction zêta de Riemann

On considère la fonction réelle ζ définie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $]0,+\infty[$ les fonctions réelles φ_n et ψ_n par :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et tout réel x de $]0,+\infty[$,

$$0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \psi_n(x)$$

2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \varphi_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   On note ainsi pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

3. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$.

4. On considère la fonction K définie sur $]1,+\infty[$ par $K(x) = \zeta(x) + \dfrac{1}{1-x}$.
   (a) Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, $K(x) = \varphi(x)$.
   (b) En déduire que la fonction K admet une limite finie quand x tend vers 1 à droite.
   (c) En déduire un équivalent simple de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 à droite, puis la limite de $\zeta(x)$ quand x tend vers 1 à droite.

Partie II : Fonction zêta alternée

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

5. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

   On définit ainsi la fonction f sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

6. La convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ est-elle uniforme sur $]0,+\infty[$? Justifier votre réponse.

7. Montrer que pour tout réel strictement positif α, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge uniformément sur $[\alpha,+\infty[$, où f_n' désigne la dérivée de la fonction f_n.

8. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0,+\infty[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

9. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^x}$$

10. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^x} = \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^x}$$

11. En déduire que pour tout réel x de $]1,+\infty[$ $\quad f(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$.

12. (a) Déterminer le développememnt limité à l'ordre 2 de $(2^{1-x} - 1)$, lorsque x tend vers 1 à droite.
    (b) En déduire le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$, lorsque x tend vers 1 à droite.

13. Déterminer les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n}$.

Problème 2 : Exponentielle de matrices diagonalisables

Dans tout ce problème, p désigne un entier naturel non nul.

$\mathbf{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
$\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.
I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.
$GL_p(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.
Si A est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ canoniquement associé à la matrice A, et par abus de notation, $Ker(A) = Ker(u_A)$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ on définit, lorsque la limite existe,

$$E(A) = \lim_{n \to +\infty} \left(I_p + \frac{1}{n} A \right)^n$$

14. Soit x un réel, justifier que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

15. Soit $D \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ une matrice diagonale.

    (a) Montrer que $E(D)$ existe et que $E(D) \in GL_p(\mathbf{R})$.

    (b) Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q(D) = E(D)$.

(c) Montrer que si D et Δ sont deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ alors

$$E(D+\Delta) = E(D).E(\Delta)$$

16. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ une matrice diagonalisable.

    (a) Montrer que $E(A)$ existe.

    (b) Montrer que $det(E(A)) = e^{tr(A)}$.

    (c) Soit $x \in \mathbf{R}$.
    Montrer que $E(xI_p + A)$ existe et que

$$E(xI_p + A) = e^x E(A)$$

17. Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

    (a) Montrer qu'il existe $P \in GL_p(\mathbf{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.
    On étudiera les restriction de u_B aux sous-espaces propres de u_A.

    (b) En déduire que $E(A+B)$ existe et que $E(A+B) = E(A)E(B) = E(B)E(A)$.

Fin de l'énoncé