Le sujet était composé de deux problèmes indépendants.

Problème : Extrait de CCINP PSI 2023

Soit $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. On s'intéresse ici à la convergence des suites matricielles $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ où pour tout $k \in \mathbf{N}$, $M_k \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ avec $p = 1$ (matrices colonnes) ou $p = n$ (matrices carrées). Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on note alors $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ ou plus simplement $M_k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)$.

On suppose que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ est muni d'une norme notée $\|.\|$ indifféremment des valeurs de n et p. En particulier, si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, V est une matrice colonne assimilée à un vecteur de $\mathbf{C}^n$ et on note $\|V\|$ sa norme.

On rappelle que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. la suite $(M_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$;
2. la suite des normes $(\|M_k - A\|)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 ;
3. pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la suite de nombres complexes $\left(m_{i,j}^{(k)}\right)_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers $a_{i,j} \in \mathbf{C}$ (convergence des coefficients de la matrice).

On s'intéresse en particulier à la suite des puissances itérées $\left(M^k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ d'une matrice donnée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Partie I - Diagonalisation et puissances d'une matrice particulière

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{C}^2$, on définit la matrice $M(a,b) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & b & a \\ a & \dots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a,b)$:

$$\forall x \in \mathbf{C} \quad P_{a,b}(x) = det(xI_n - M(a,b))$$

On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$M(a,b) = bI_n + aM(1,0).$$

1. On suppose, dans cette question uniquement, que $(a,b) \in \mathbf{R}^2$.

$$\boxed{\text{La matrice } M(a,b) \text{ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.}}$$

2. Par calcul matriciel direct pour $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, on a

$$M(a,b)V = \begin{pmatrix} b+(n-1)a \\ \vdots \\ b+(n-1)a \end{pmatrix} = (b+(n-1)a)V \qquad \text{avec } V \neq 0$$

donc $\boxed{V \text{ est un vecteur propre de } M(a,b) \text{ pour la valeur propre } \lambda = b+(n-1)a.}$

3. 1ère méthode : puisque que l'on donne la formule

D'après le résultat de la question précédente, on sait que $0+(n-1)\times 1 = n-1$ est une valeur propre de $M(1,0)$, donc $(X-(n-1))$ divise le polynôme caractéristique $P_{1,0}$.

On remarque que $M(1,0)+I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, donc $M(1,0)+I_n$ est de rang égal à 1 et par théorème du rang $Ker(M(1,0)+I_n)$ est de dimension $n-1 \geqslant 2$, alors (-1) est une valeur propre de $M(1,0)$ de multiplicité au moins égale à $(n-1)$, ce qui entraine que $(X+1)^{n-1}$ divise $P_{1,0}$.

$-1 \neq n-1$, alors $(X-(n-1))(X+1)^{n-1}$ divise $P_{1,0}$, or on sait que $P_{1,0}$ est un polynôme de degré n et de coefficient dominant égal à 1, donc $\boxed{P_{1,0} = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}}$

2nde méthode : par calcul direct

Par définition pour tout réel x

$$\begin{aligned} P_{1,0}(x) &= det(xI_n - M(1,0)) \\ &= \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & x & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & x & -1 \\ -1 & \dots & -1 & -1 & x \end{vmatrix} \end{aligned}$$

on effectue $C_1 \leftarrow C_1 + \sum_{j=2}^{n} C_j$, on obtient :

$$P_{1,0}(x) = \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & -1 & \dots & -1 \\ x-(n-1) & x & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ x-(n-1) & -1 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

On effectue alors $L_i \longleftarrow L_i - L_1$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ et on obtient :

$$P_{1,0}(x) = \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & x+1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

Par déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad P_{1,0}(x) = (x-(n-1)(x+1)^{n-1}$$

$\boxed{\text{On a bien } P_{1,0}(X) = (X-(n-1)(X+1)^{n-1}.}$

4. On suppose que $a \neq 0$. On remarque que $M(a,b) = bI_n + aM_{1,0}$ alors pour tout scalaire x,

$$\begin{aligned} P_{a,b}(x) &= det(xI_n - M(a,b) \\ &= det(xI_n - bI_n - aM_{1,0}) \\ &= det((x-b)I_n - aM_{1,0}) \end{aligned}$$

puisque $a \neq 0$ et par multilinéairté du déterminant, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{a,b}(x) &= a^n det\left(\frac{x-b}{a}I_n - M_{1,0}\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{On obtient donc } P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right).}$

Le résultat de la question 3 donne alors

$$P_{a,b}(X) = a^n\left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a}+1\right)^{n-1} = (X-(b+(n-1)a)\,(X-(b-a))^{n-1}$$

Les valeurs propres de $M(a,b)$ sont les racines de son polynôme caractéristique avec leur multiplicité, donc ce sont $\boxed{\text{les deux réels } b+(n-1)a \text{ et } b-a \text{ de multiplicité respective } 1 \text{ et } n-1.}$

5. On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbf{C}[X]$ par $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$.

$$\begin{aligned} Q_{a,b}(M(a,b)) &= (M(a,b)-(b-a)I_n)\,.\,(M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n) \\ &= M(a,a).M(a,-(n-1)a) \end{aligned}$$

Notons $M(a,a) = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $M(a,-(n-1)a) = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $Q_{a,b}(M(a,b)) = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a $b_{ij} = \begin{cases} -(n-1)a & \text{si } i=j \\ a & \text{si } i\neq j \end{cases}$, donc par produit matriciel pour $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{ij}b_{jj} + \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a_{ik}b_{kj} = -(n-1)a^2 + \sum_{k=1,k\neq j}^{n} a^2 = -(n-1)a^2+(n-1)a^2 = 0$$

Donc $Q_{a,b}(M(a,b)) = O_n$. $\boxed{Q_{a,b} \text{ est bien un polynôme annulateur de } M(a,b).}$

- Si $a\neq 0$ alors $b+(n-1)a \neq b-a$ et $Q_{a,b}$ est un polynôme scindé à racines simples qui est annulateur de $M(a,b)$, par caractérisation on sait que $M(a,b)$ est diagonalisable.

- Si $a=0$ alors $M(a,b) = bI_n$ est diagonale.

$\boxed{\text{Dans tous les cas } M(a,b) \text{ est diagonalisable.}}$

6. Soit $k\in\mathbf{N}$. On suppose que $a\neq 0$. Par division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (Q_k,R_k) tel que $X^k = Q_{a,b}(X).Q_k(X)+R_k(X)$ avec $deg(R_k) < deg(Q_{a,b})$ donc il existe $(u_k,v_k)\in\mathbf{R}^2$ tel que $X^k = Q_{a,b}(X).Q_k(X)+u_kX+v_k$. En évaluant en $b-a$ et $b+(n-1)a$ les deux racines distinctes de $Q_{a,b}$, on obtient u_k et v_k vérifient :

$$(S)\begin{cases} (b-a)^k = u_k(b-a)+v_k \\ (b+(n-1)a)^k = u_k(b+(n-1)a)+v_k \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (b-a)^k = u_k(b-a)+v_k \\ (b+(n-1)a)^k-(b-a)^k = nau_k \end{cases}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} u_k = \dfrac{(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k}{na} \\ v_k = \dfrac{(b-a)^k(b+(n-1)a)-(b-a)(b+(n-1)a)^k}{na} \end{cases}$$

Le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ est donc $R_k = u_kX+v_k$ avec les valeurs trouvées ci-dessus.

Puisque $Q_{a,b}(M(a,b)) = O_n$, on obtient

$$M(a,b)^k = u_kM(a,b)+v_kI_n \text{ avec } \begin{cases} u_k = \dfrac{(b+(n-1)a)^k-(b-a)^k}{na} \\ v_k = \dfrac{(b-a)^k(b+(n-1)a)-(b-a)(b+(n-1)a)^k}{na} \end{cases}$$

7. Supposons que $|b-a|<1$ et $|b+(n-1)a|<1$.

<u>1ère méthode : avec la question 6</u>

D'après le résultat de la question 6., on sait que

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad M^k(a,b) = u_k M(a,b) + v_k I_n \text{ avec } \begin{cases} u_k = \dfrac{(b+(n-1)a)^k - (b-a)^k}{na} \\ v_k = \dfrac{(b-a)^k(b+(n-1)a) - (b-a)(b+(n-1)a)^k}{na} \end{cases}$$

Par hypothèses $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$ alors $\lim\limits_{k\to+\infty} (b-a)^k = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} (b+(n-1)a)^k = 0$. Par opérations sur les limites on obtient $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = 0$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} (u_k M(a,b) + v_k I_n) = O_n$ et $\boxed{\text{la suite } (M^k(a,b))_{k\in\mathbf{N}^*} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$

<u>2nde méthode : avec les questions 4 et 5</u>

D'après les questions 4 et 5, on sait qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$M(a,b) = P.D.P^{-1} \qquad \text{avec } D = \begin{pmatrix} b-a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & b-a & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b+(n-1)a \end{pmatrix}$$

Alors $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad M^k(a,b) = P.D^k.P^{-1}$ avec $D^k = \begin{pmatrix} (b-a)^k & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & (b-a)^k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (b+(n-1)a)^k \end{pmatrix}$.

Puisque $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$, on sait que $\lim\limits_{k\to+\infty} (b-a)^k = 0 = \lim\limits_{k\to+\infty} (b+(n-1)a)^k$ et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} D^k = O_n$. On en déduit (vu en exercice en classe mais on le verra dans le cours plus tard) que $\lim\limits_{k\to+\infty} PD^k.P^{-1} = P.O_n.P^{-1} = O_n$ et donc

$\boxed{\text{la suite } (M^k(a,b))_{k\in\mathbf{N}^*} \text{ converge vers la matrice nulle.}}$

Partie II - Limite des puissances d'une matrice

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On note sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit u un endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \quad |\lambda| < 1$$

où $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u. On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base $\mathscr{B}$.

L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

On suppose (sauf à la **question 12.**) que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

8. Par définition de la matrice $A = T$, on sait que $u(e_1) = \lambda_1 e_1$ et si $u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$ alors par linéarité $u^{k+1}(e_1) = u^k(\lambda_1 e_1) = \lambda_1 u^k(e_1) = \lambda_1^{k+1} e_1$ donc par récurrence on obtient

$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad u^k(e_1) = \lambda_1^k e_1$$

donc $\|u^k(e_1)\| = |\lambda_1|^k \|e_1\|$.

Puisque $A = T$ est triangulaire, ses valeurs propres sont les coefficients de sa diagonale, donc en particulier $|\lambda_1| < 1$, ce qui entraine $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_1^k = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \|u^k(e_1)\| = 0}$ ce qui s'écrit $\lim\limits_{k\to+\infty} \|u^k(e_1) - 0\| = 0$ donc la suite de vecteurs $(u^k(e_1))_{k\in\mathbf{N}}$ converge vers le vecteur nul : $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_1) = 0.}$

On suppose qu'il existe $i \in [\![1, n-1]\!]$ tel que pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} u^k(e_j) = 0$.

9. $A = T$ est la matrice de l'endomorphisme u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, donc ses colonnes sont les coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ des vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_n)$. Or A est triangulaire supérieure alors $u(e_{i+1}) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i+1})$ et la $(i+1)^{\text{ième}}$ coordonnée de $u(e_{i+1})$ est λ_{i+1}, donc il existe $x \in \text{Vect}(e_j)_{j\in[\![1,i]\!]}$ tel que : $\boxed{u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x}$

On en déduit que pour $k = 1$, on a : $u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$, alors par linéarité de u :

$$u^{k+1}(e_{i+1}) = u\left(u^k(e_{i+1})\right) = \lambda_{i+1}^k u(e_{i+1}) + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^{m+1}(x)$$

En utilisant $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x$ et en effectuant le changement d'indice $p = m+1$ dans la somme il vient

$$u^{k+1}(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \lambda_{i+1}^k x + \sum_{p=1}^{k} \lambda_{i+1}^{k-p} u^p(x) = \lambda_{i+1}^{k+1} e_{i+1} + \sum_{p=0}^{k+1-1} \lambda_{i+1}^{(k+1)-p-1} u^p(x)$$

On a ainsi montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in \mathbf{N}^* \quad u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)}$

10. • Si $\lambda_{i+1} = 0$ alors $\forall k \in \mathbf{N}^*$ $\quad \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$ et donc $\lim_{k \to +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$.

• Supposons $\lambda_{i+1} \neq 0$.

Par inégalité triangulaire et homogénéité de la norme

$$0 \leqslant \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\|$$

Par hypothèse $\lim_{k \to +\infty} u^k(e_j) = 0$ pour $j \in [\![1, i]\!]$, or $x \in Vect(e_1, \ldots, e_i)$, donc il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) \in \mathbf{C}^i$ tel que $x = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j e_j$ et par linéarité de u, $\forall k \in \mathbf{N} \quad u^k(x) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_j u^k(e_j)$ et par combinaison linéaire de limites finies on obtient $\lim_{k \to +\infty} u^k(x) = 0$.

On en déduit que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbf{N} \quad \forall m \in \mathbf{N}, \quad m \geqslant k_0 \Longrightarrow \|u^m(x)\| \leqslant \varepsilon$ et donc

$$k > k_0 \Longrightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k_0} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \left(\sum_{m=0}^{k_0} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \|u^m(x)\| \right) + \left(\sum_{m=k_0+1}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-m-1} \varepsilon \right)$$

Par le changement d'indice $p = k - m - 1$ sur la seconde somme, on obtient :

$$k > k_0 \Longrightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k_0} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant |\lambda_{i+1}|^k . \left(\sum_{m=0}^{k_0} \frac{\|u^m(x)\|}{|\lambda_{i+1}|^{m+1}} \right) + \varepsilon \left(\sum_{p=0}^{k-k_0-2} |\lambda_{i+1}|^p \right)$$

Par hypothèse $|\lambda_{i+1}| < 1$ donc $\lim_{k \to +\infty} |\lambda_{i+1}|^k = 0$ donc $\lim_{k \to +\infty} \left(|\lambda_{i+1}|^k . \sum_{m=0}^{k_0} \frac{\|u^m(x)\|}{|\lambda_{i+1}|^{m+1}} \right) = 0$.

On en déduit qu'il existe $k_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que $k \geqslant k_1 \Longrightarrow |\lambda_{i+1}|^k \left(\sum_{m=0}^{k_0} \frac{\|u^m(x)\|}{|\lambda_{i+1}|^{m+1}} \right) \leqslant \varepsilon$.

De plus la série géométrique à termes positifs $\sum_{p \geqslant 0} |\lambda_{i+1}|^p$ converge, on a alors $\sum_{p=0}^{k-k_0-2} |\lambda_{i+1}|^p \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} |\lambda_{i+1}|^p$ donc

$$k \geqslant max(k_0, k_1) \Longrightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k_0} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon . \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}$$

En posant $M = 1 + \frac{1}{1 - |\lambda_{i+1}|}$, on a$M > 0$ et

$$k \geqslant max(k_0, k_1) \Longrightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k_0} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant M\varepsilon$$

On a ainsi obtenu :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbf{N} \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad k \geqslant K \Longrightarrow \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| \leqslant M.\varepsilon$$

On a donc obtenu : $\boxed{\lim_{k \to +\infty} \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0.}$

On a aussi $\lim_{k \to +\infty} \|\lambda_{i+1}^k e_{i+1}\| = \lim_{k \to +\infty} |\lambda_{i+1}|^k \|e_{i+1}\| = 0.$

On rappelle que $u^k(e_{i+1} = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum_{m=0}^{k_0} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$, alors par inégalité triangulaire

$$0 \leqslant \|u^k(e_{i+1}\| \leqslant \|\lambda_{i+1}^k e_{i+1}\| + \left\| \sum_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\|$$

alors par théorème d'encadrement $\lim_{k \to +\infty} \|u^k(e_{i+1})\| = 0$,ce qui signifie que $\boxed{\lim_{k \to +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0.}$

11. La matrice T^k est la matrice de l'endomorphisme u^k dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ alors sa $i^{\text{ième}}$ colonne représente le vecteur $u^k(e_i)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

    Les questions 8-10 forment la preuve par récurrence forte que : $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \lim_{k \to +\infty} u^k(e_i) = 0.$

    Alors par la caractérisation 3 de l'énoncé sur la convergence d'une suite de matrices, on obtient $\boxed{\lim_{k \to +\infty} T^k = O_n.}$

12. On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure.

    Tout polynôme de $\mathbf{C}[X]$ étant scindé, le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé dans $\mathbf{C}[X]$, alors on sait que A est trigonalisable, il existe donc une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $A = P.T.P^{-1}$ avec les coefficients diagonaux de T qui sont les valeurs propres de A.
    On obtient alors par récurrence : $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad A^k = P.T^k.P^{-1}$ et d'après l'étude précédente, $\lim_{k \to +\infty} T^k = O_n$. Les matrices P et P^{-1} étant indépendantes de k, par produit matriciel et opérations sur les limites finies, on obtient $\lim_{k \to +\infty} P.T^k.P^{-1} = O_n$.

    $\boxed{\text{On a bien } \lim_{k \to +\infty} A^k = 0.}$

Problème n°2 : Ensemble des matrices diagonalisables à coefficients réels

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.

Dans tout l'exercice, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

$\mathcal{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et $\mathscr{A}_n$ celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Question de cours : On sait que $\mathcal{S}_n$ est de dimension égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\mathscr{A}_n$ est de dimension égale à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$.

13. On sait que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable donc $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{D}_2$.
De plus $dim\mathcal{S}_2 = \dfrac{2 \times 3}{2} = 3$, donc

$$\boxed{\mathcal{S}_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ constitué de matrices diagonalisables.}}$$

14. On sait que $dim\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = 2^2 = 4$.
La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ puisque son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ qui n'est pas scindé dans $\mathbf{R}[X]$ donc $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ n'est pas contenu dans $\mathcal{D}_2$.
On en déduit que tout sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ inclus dans $\mathcal{D}_2$ est de dimension strictement inférieure à 4.
On a vu que $\mathcal{S}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_2$, on en déduit donc que $\boxed{\text{la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ contenu dans } \mathcal{D}_2 \text{ est 3.}}$

15. Supposons que $\mathcal{D}_2$ soit un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ alors d'après le résultat précédent on a $dim\mathcal{D}_2 = 3 = dim\mathcal{S}_2$ et puisque $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{D}_2$, on a finalement $\mathcal{D}_2 = \mathcal{S}_2$.

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire, son polynôme caractéristique est donc $(X-1)X$ qui est scindé à racines simples alors A est diagonalisable. On a donc $A \in \mathcal{D}_2$, mais $A \notin \mathcal{S}_2$, ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Par raisonnement par l'absurde on a obtenu que } \mathcal{D}_2 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).}$$

<u>Autre méthode : celle utilisée en partie 2</u>
On prouve directement que $\mathcal{D}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel en prenant deux matrices

diagonalisables dont la somme n'est pas diagonalisable.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables (polynôme caractéristique scindé à racines simples) et $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est triangulaire alors 0 est sa seule valeurs propre, or le polynôme $X - 0 = X$ n'est pas annulateur de $A+B$, on sait par caractérisation que $A + B$ n'est pas diagonalisable.

16. On a vu que $\mathcal{S}_2 \subsetneq \mathcal{D}_2 \subsetneq \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ avec $dim\mathcal{S}_2 = 3$ et $dim\mathcal{M}_2(\mathbf{R}) = 4$, donc

$$\boxed{\text{le seul sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \text{ contenant } \mathcal{D}_2 \text{ est } \mathcal{M}_2(\mathbf{R}).}$$

17. Soient $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc > 0 \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0 \right\}$.

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, il existe $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ tel que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A = X^2 - Tr(A)X + det(A) = X^2 - (a+d)X + ad - bc$$

Ce polynôme du second degré admet pour discriminant

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc$$

• Si $A \in \Omega$ alors $\Delta > 0$ et donc χ_A admet deux racines réelles distinctes ; χ_A est alors scindé dans $\mathbf{R}[X]$ et à racines simples et par le théorème de Cayley-Hamilton il est annulateur de A,donc A est diagonalisable. On a donc $\Omega \subset \mathcal{D}_2$.

• Si $A \in \mathcal{D}_2$ alors χ_A scindé dans $\mathbf{R}[X]$, donc son discriminant est positif, ce qui donne $A \in F$.

$$\boxed{\text{On a bien obtenu : } \Omega \subset \mathcal{D}_2 \subset F.}$$

Partie 2

On revient au cas général avec $n > 2$.

18. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définies par :

- $a_{1,1} = a_{1,2} = 1$, $a_{2,2} = -1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon,
- $b_{1,1} = -1$, $b_{1,2} = b_{2,2} = 1$ et $b_{i,j} = 0$ sinon.

(a) Les matrices A et B sont des matrices triangulaires et aussi diagonales par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ 0 & -1 & \\ & & O_{n-2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ & & O_{n-2} \end{pmatrix}$$

<u>1ère méthode : sans le polynôme caractéristique</u>

Les valeurs propres de A et B sont leurs coefficients diagonaux donc sont $(-1), 1$ et 0, on sait, par caractérisation, que A et B sont diagonalisables si, et seulement si, $P = X(X-1)(X+1) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A et de B.

Par produit de matrices diagonales par blocs, puisque $A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & O_{n-2} \end{pmatrix}$ avec $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, on a : $A^2 = \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & O_{n-2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & O_{n-2} \end{pmatrix}$ et

$$A^3 = A.A^2 = \begin{pmatrix} C \times I_2 & 0 \\ 0 & O_{n-2} \times O_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & O_{n-2} \end{pmatrix} = A$$

Donc $P(A) = 0$. On montre de même que $P(B) = 0$.

$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}}$

<u>2nde méthode : avec le polynôme caractéristique</u>

Par définition du polynôme caractéristique χ_A de A, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R} \quad \chi_A(x) &= det(xI_n - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 & \\ 0 & x+1 & \\ & & xI_{n-2} \end{vmatrix} \\ &\quad \text{déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs} \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} .det(xI_{n-2}) \\ \forall x \in \mathbf{R} \quad \chi_A(x) &= (x-1)(x+1)x^{n-2} \end{aligned}$$

De même B étant triangulaire, $\chi_B(x) = det(xI_n - B) = (x+1)(x-1)x^{n-2}$.

A et B admettent donc les mêmes valeurs propres $-1, 1, 0$ qui sont respectivement de multiplicité $1, 1, n-2$.

Les sous-espaces propres $Ker(A - I_n)$, $Ker(B - I_n)$, $Ker(A + I_n)$ et $Ker(B + I_n)$ sont alors de dimension 1 (sous-espaces propres associés à des valeurs propres de multiplicité 1).

Les deux premières colonnes de A, respectivement de B, ne sont pas colinéaires et les autres colonnes sont nulles alors $rg(A) = 2 = rg(B)$, par le théorème du rang on obtient que $Ker(A)$ et $Ker(B)$ sont de dimension $n-2$.

χ_A et χ_B sont scindés et chaque sous-espace propre est de dimension égale à la multiplicité de la valeur propre associée donc $\boxed{A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables.}}$

(b) On remarque que $A+B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \\ 0 & 0 & \\ & & O_{n-2} \end{pmatrix}$ est triangulaire donc son polynôme caractéristique est X^n. 0 est la seule valeur propre de $A+B$, mais $X-0=X$ n'est pas annulateur de $A+B$, alors par caractérisation on sait que $A+B$ n'est pas diagonalisable.

On a : $A \in \mathcal{D}_n$, $B \in \mathcal{D}_n$ avec $A+B \notin \mathcal{D}_n$ donc $\boxed{\mathcal{D}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}).}$

19. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, antisymétrique.

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ une valeur propre de N, il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $X \neq 0$ et $NX = \lambda X$, alors

$$X^T.N.X = X^T.(\lambda X) = \lambda X^T.X$$

On a aussi en passant à la transposée :

$$(X^T.N.X)^T = X^T.N^T.(X^T)^T = X^T(-N).X = -X^T.N.X) = -\lambda X^T X$$

$X^T.N.X$ est une matrice carrée d'ordre 1 donc $(X^T.N.X)^T = X^T.N.X$ et donc

$$\lambda X^T.X = -\lambda X^T.X$$

Par produit matriciel $X^T.X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$ et $X \neq 0$ donc $X^T X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$ et par division $\lambda = -\lambda$. Le réel λ est donc nul.

$\boxed{\text{On a donc } Sp_{\mathbf{R}}(N) \subset \{0\} \text{ avec } Sp_{\mathbf{R}}(N) \text{ ensemble des valeurs propres réelles de } N.}$

20. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_n$.

• $S \cap \mathscr{A}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par intersection de deux sous-espaces vectoriels donc $0 \in S \cap \mathscr{A}_n$.

• Soit $A \in S \cap \mathscr{A}_n$. A est donc diagonalisable et n'admet que 0 pour valeur propre, donc le polynôme $X - 0 = X$ est annulateur de A, ce qui donne $A = O$.

$\boxed{\text{On a donc } S \cap \mathscr{A}_n = \{0\}.}$

S et $\mathscr{A}_n$ sont donc en somme directe, donc $dim(S + \mathscr{A}_n) = dim(S) + dim(\mathscr{A}_n) \leqslant dim\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui donne $dimS \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Or $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel inclus dans $\mathcal{D}_n$ qui est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ contenu dans $\mathcal{D}_n$ est donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\mathcal{S}_n$

réalise cette condition.

21. Soit une matrice $P \in GL_n(\mathbf{R})$.
On note f_P l'application linéaire qui à une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ associe la matrice $P^{-1}MP$.
   (a) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad f_P(M) = P^{-1}MP \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   Par distributivité du produit matriciel sur l'addition, on sait que

$$\begin{aligned}
\forall (M,N,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \quad f_P(\lambda M + N) &= P^{-1}.(\lambda M + N).P \\
&= (\lambda P^{-1}M + P^{-1}N) \\
&= \lambda P^{-1}MP + P^{-1}NP \\
\forall (M,N,\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R} \quad f_P(\lambda M + N) &= \lambda f_P(M) + f_P(N)
\end{aligned}$$

   f_P est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

$$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \quad Y = f_P(X) \Longleftrightarrow Y = P^{-1}XP \Longleftrightarrow PY = XP \Longleftrightarrow PYP^{-1} = X$$

   or $P = (P^{-1})^{-1}$, alors $f_P(X) = Y \Longleftrightarrow X = f_{P^{-1}}(Y)$, ce qui signifie que f_P est bijective de réciproque $f_{P^{-1}}$.

   $\boxed{f_P \text{ est un automorphisme de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ et } f_P^{-1} = f_{P^{-1}}.}$

   f_P étant un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\boxed{\dim S_P = dim f_P(\mathcal{S}_n) = dim \mathcal{S}_n = \dfrac{n(n+1)}{2}.}$

   (b) Soit $B \in \mathcal{S}_P$, par définition il existe $M \in \mathcal{S}_n$ telle que $B = f_P(M) = P^{-1}MP$.
   $M \in \mathcal{S}_n$ donc M est diagonalisable, M est semblable à une matrice diagonale D et B est semblable à M alors B est elle-même semblable à la matrice diagonale D. Donc $B \in \mathcal{D}_n$.

   $\boxed{\text{On a prouvé : } \mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n.}$

   (c) • D'après le résultat de la question précédente, $\forall P \in GL_n(\mathbf{R}) \quad \mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n$ donc $\displaystyle\bigcup_{P \in GL_n(\mathbf{R})} \mathcal{S}_P \subset \mathcal{D}_n$.

   • Soit $M \in \mathcal{D}_n$, M étant diagonalisable elle est semblable à une matrice diagonale donc il existe $P \in GL_n(\mathbf{R})$ et D matrice diagonale telles que $M = P^{-1}.D.P$, alors $M = f_P(D)$ et D étant diagonale elle est symétrique donc $M \in f_P(\mathcal{S}_n)$.

   On a donc $\forall M \in \mathcal{D}_n \quad \exists P \in GL_n(\mathbf{R})$ tel que $M \in \mathcal{S}_P$, donc $M \in \displaystyle\bigcup_{P \in GL_n(\mathbf{R})} \mathcal{S}_P$ et

   $\mathcal{D}_n \subset \displaystyle\bigcup_{P \in GL_n(\mathbf{R})} \mathcal{S}_P$.

$$\boxed{\text{Par double inclusion on a obtenu : } \mathcal{D}_n = \bigcup_{P \in GL_n(\mathbf{R})} \mathcal{S}_P.}$$

22. On note $\{E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

   (a) $\boxed{\mathcal{B}_1 = (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \text{ est une base de } \mathcal{S}_n.}$

   (b) Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ où $i < j$, on pose $T_{i,j} = 4E_{j,i} + E_{i,j}$.

   Soit P la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(1, \ldots, 1, 2, 1, \ldots, 1)$ où le 2 est à la j-ème position.

   On peut donc écrire $P = 2E_{j,j} + \displaystyle\sum_{k=1, k \neq j}^{n} E_{k,k}$, alors par matrice inverse d'une matrice diagonale, on a $P^{-1} = \dfrac{1}{2} E_{j,j} + \displaystyle\sum_{k=1, k \neq j}^{n} E_{k,k}$.

   On sait que $\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4 \quad E_{i,j}.E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$ où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$, alors puisque $i < j$ on a :

$$\begin{aligned} T_{i,j}P &= (4E_{j,i} + E_{i,j}) . \left(2E_{j,j} + \sum_{k=1, k \neq j}^{n} E_{k,k} \right) \\ &= 0 + 4 \sum_{k=1, k \neq j}^{n} 4E_{j,i}E_{k,k} + 2E_{i,j} + \sum_{k=1, k \neq j}^{n} 0 \\ T_{i,j}P &= 4E_{j,i} + 2E_{i,j} \end{aligned}$$

   Ce qui donne alors

$$\begin{aligned} P^{-1}T_{i,j}P &= \left(\frac{1}{2} E_{j,j} + \sum_{k=1, k \neq j}^{n} E_{k,k} \right) . (4E_{j,i} + 2E_{i,j}) \\ &= 2E_{j,i} + 4 \sum_{k=1, k \neq j}^{n} 0 + 0 + 2 \sum_{k=1, k \neq j}^{n} E_{k,k}E_{i,j} \\ P^{-1}T_{i,j}P &= 2E_{j,i} + 2E_{i,j} \end{aligned}$$

   D'après l'égalité ci-dessus $P^{-1}T_{i,j}P \in \mathcal{S}_n$, on sait alors que $P^{-1}T_{i,j}P$ est diagonalisable. $T_{i,j}$ est semblable à $P^{-1}T_{i,j}P$ qui est elle-même semblable à une matrice diagonale D donc $T_{i,j}$ est elle aussi semblable à D. $\boxed{\text{La matrice } T_{i,j} \text{ est donc diagonalisable.}}$

(c) Soit $T = \text{Vect}(T_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j)$.

T et $\mathcal{S}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

• *Montrons que la famille $(T_{i,j})_{1 \leqslant i<j \leqslant n}$ est libre :*

Soit $(\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i<j \leqslant n}$ une famille de réels telle que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{i,j} T_{i,j} = 0$.

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{i,j} T_{i,j} = 0 \iff \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} 4\alpha_{i,j} E_{j,i} + \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{i,j} E_{i,j} = 0$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 4\alpha_{1,2} & \dots & 4\alpha_{1,n} \\ \alpha_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4\alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{1,n} & \dots & \alpha_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{i,j} T_{i,j} = 0 \iff \alpha_{i,j} = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

La famille $(T_{i,j})_{1 \leqslant i<j \leqslant n}$ est libre donc $dim T = card \{T_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j\} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On en déduit que $dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = dim T + dim \mathcal{S}_n$.

• Soit $A \in T \cap \mathcal{S}_n$.

Il existe $(\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i<j \leqslant n}$ et $(\beta_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ des réels tels que $A = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \alpha_{i,j} T_{i,j} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \beta_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i})$
ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 0 & 4\alpha_{1,2} & \dots & 4\alpha_{1,n} \\ \alpha_{1,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 4\alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{1,n} & \dots & \alpha_{n-1,n} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta_{11} & \beta_{1,2} & \dots & \beta_{1,n} \\ \beta_{1,2} & 2\beta_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1,n} \\ \beta_{1,n} & \dots & \beta_{n-1,n} & 2\beta_{n,n} \end{pmatrix}$$

Donc $\alpha_{i,j} = 0 = \beta_{i,j}$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i < j$ et $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \beta_{i,i} = 0$, donc $A = 0$.

On a $T \cap \mathcal{S}_n = \{0\}$.

T et $\mathcal{S}_n$ sont donc supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$: $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = T \oplus \mathcal{S}_n.}$

Toutes les matrices $T_{i,j}$ sont diagonalisables et les matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ sont symétriques réelles donc diagonalisables, on en déduit qu' une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ constituée de matrices toutes diagonalisables est la famille constituée des matrices $T_{i,j}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et des matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.

(d) Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui contient $\mathcal{D}_n$, alors F contient toutes les matrices $T_{i,j}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et toutes les matrices $E_{i,j} + E_{j,i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, donc F contient tous les éléments d'une base de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ce qui donne $F = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

$$\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ est le seul sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ contenant } \mathcal{D}_n.}$$

Fin du corrigé