Exercice 1

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $f_n : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 3

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction f_n par

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f_n(t) = \mathbf{1}_{]0,n]}(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$$

1. Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).
2. Démontrer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t$.
3. Soit $\gamma \in \mathbf{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\gamma+o(1)$. A l'aide du changement de variable $x = 1-\dfrac{t}{n}$ et d'une intégration par parties, démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -\gamma$.

Exercice 4

Soit $\varphi \in C^1([0,1],[0,1])$ telle que $\forall x \in [0,1] \quad |\varphi'(x)| < 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(\varphi^n(x))\mathrm{d}x$ avec $f \in C^0([0,1],\mathbf{R})$ et $\varphi^n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$.

Exercice 5

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_n : t \mapsto t^n \ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t$.
2. Prouver que $f : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que $\displaystyle\int_0^1 e^t \ln(t)\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.n!}$.

Exercice 6

On note ζ la fonction zéta de Riemann : $\forall x > 1 \quad \zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Montrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} (\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln(n)}$.

Exercice 7

Soit $a > 0$. Pour tout n de $\mathbf{N}^*$, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n t^{n+a}$.

On cherche à prouver que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.

1. Expliquer pourquoi on ne peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme.
2. En appliquant convenablement le théorème de convergence dominée, montrer l'égalité souhaitée.

Exercice 8

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ intégrable sur $\mathbf{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)}{t+ix}\mathrm{d}t$.

Exercice 9

Soit $F : x \in]1, +\infty[\mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(x^2-t^2)}}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est bien définie et monotone.
2. Montrer que F est continue.
3. Trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Trouver la limite de $F(x)$ quand $x \to 1^+$.

Exercice 10

On définit la fonction $f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$ et on pose $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que g est définie sur $D =]0, +\infty[$.
3. Montrer que g est dérivable sur D et donner l'expression de sa dérivée.
4. Calculer la limite de $g(x)$ quand $x \to +\infty$, en déduire une expression simplifiée de $g(x)$.

Exercice 11 *Intégrale de Gauss*

Soient $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f et g sont définies et de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
2. Montrer que $\forall x \geqslant 0 \quad g'(x) = -2f'(x)f(x)$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.