Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et tous les espaces vectoriels considérés sont des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels.

1 Produit scalaire, norme euclidienne

1.1 Définition d'un produit scalaire

Definition 1.1

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

On appelle produit scalaire sur E, toute forme bilinéaire symétrique définie-positive sur E.

Un produit scalaire sur E est donc une application $\varphi : (x, y) \in E \times E \mapsto (x|y)$ telle que :

- φ *est à valeurs dans* $\mathbf{R}$.
- φ *est bilinéaire :* $\begin{cases} \forall y \in E, \quad \begin{array}{l} E \to \mathbf{R} \\ x \mapsto (x|y) \end{array} \quad \text{est linéaire} \\ \\ \forall x \in E, \quad \begin{array}{l} E \to \mathbf{R} \\ y \mapsto (x|y) \end{array} \quad \text{est linéaire.} \end{cases}$
- φ *est symétrique :* $\forall (x, y) \in E^2, \quad (x|y) = (y|x)$
- φ *est définie-positive :* $\forall x \in E, \quad (x|x) \geqslant 0$ et $(x|x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

On utilisera en général la notation introduite précédemment : $(x|y)$ ou $\langle x, y\rangle$. La notation $x.y$ est réservée à la géométrie.

Remarque 1.1 *Conséquence de la bilinéarité*

Pour $(x, x', y, y') \in E^4$, on aura :

$$(x + x'|y + y') = (x|y) + (x'|y) + (x|y') + (x'|y')$$

Et plus généralement pour $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \in E^{n+p}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbf{R}^{n+p}$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \middle| \sum_{k=1}^{p} \mu_k y_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} \lambda_i \mu_k \left(x_i|y_k\right)$$

Proposition 1.1 *Caractérisation*

Soit $\varphi : \begin{array}{l} E \times E \to \mathbf{R} \\ (x,y) \mapsto (x|y) \end{array}$.

φ est un produit scalaire sur E si et seulement si : $\begin{cases} \varphi \text{ est linéaire par rapport à la première variable} \\ \varphi \text{ est symétrique} \\ \varphi \text{ est définie-positive.} \end{cases}$

Definition 1.2

• On appelle **espace préhilbertien réel** tout couple $(E, (\quad|\quad))$ où E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $(\quad|\quad)$ est un produit scalaire sur E.

• On appelle **espace euclidien** tout espace préhilbertien réel de **dimension finie**.

1.2 Exemples de référence

1. **Produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$ et sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$:**

   L'application $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R} \\ (x,y) & \mapsto & (x|y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{array}$, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}^n$ appelé le produit scalaire canonique.
   $\mathbf{R}^n$ est ainsi muni de sa structure euclidienne canonique.

   Expression matricielle :

   Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors on peut écrire $X^T.Y = (x|y)$.

   On en déduit que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ (X,Y) & \longmapsto & X^T Y \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$.
   Ce produit scalaire est appelé le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$.

2. **Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$** :

   Proposition 1.2

   L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ (A,B) & \mapsto & (A|B) = tr\left(A^T.B\right) \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ appelé produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

   De plus en notant $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$, alors $\boxed{(A|B) = tr\left(A^T.B\right) = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} a_{ij} b_{ij}.}$

3. **Produits scalaires intégral sur $C^0([a,b],\mathbf{R})$** :

   Soit $E = C^0([a,b],\mathbf{R})$ avec $a < b$.

   L'application $\begin{array}{l} E\times E \to \mathbf{R} \\ (f,g) \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est un produit scalaire sur E, appelé produit scalaire intégral sur $C^0([a,b],\mathbf{R})$.

   Généralisation : produit scalaire intégral avec poids

   Soit $E = C^0([a,b],\mathbf{R})$ avec $a < b$.

   Si $\omega \in C^0([a,b],]0,+\infty[)$ alors l'application $\begin{array}{l} E\times E \to \mathbf{R} \\ (f,g) \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_a^b \omega(t)f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{array}$ est un produit scalaire sur E.

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 1.3

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ |\ )$.

$$\boxed{\forall (x,y)\in E^2,\quad (x|y)^2 \leqslant (x|x)\,(y|y)}$$

Avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires ($x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbf{R},\quad y = \lambda x$).

Remarque 1.2 *Application aux exemples de référence*

1. Si $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n$ et $(y_1,\ldots,y_n)\in\mathbf{R}^n$ alors

   $$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

   avec égalité si et seulement si $(x_1,\ldots,x_n) = 0$ ou $\exists\lambda\in\mathbf{R},\quad \forall i\in[\![1,n]\!]\quad y_i = \lambda x_i$.

2. Si $f\in C^0([a,b],\mathbf{R})$ et $g\in C^0([a,b],\mathbf{R})$ alors

   $$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\int_a^b)g^2(t)\mathrm{d}t$$

   et $\left(\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 = \displaystyle\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\int_a^b)g^2(t)\mathrm{d}t$ si et seulement si (f,g) est liée.

Exemple 1.1

Justifier que $\forall (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbf{R}^n\quad \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{3}\sum_{k=1}^n x_k^2.$

1.4 Norme euclidienne

Definition 1.3 *Norme euclidienne*

Soit E muni d'un produit scalaire $(\ \ |\ \ )$.

- Soit $x \in E$, on appelle **norme du vecteur** x le nombre réel, noté $\|x\|$, défini par : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
- On appelle **norme euclidienne** l'application $\begin{array}{l} E \to \mathbf{R}^+ \\ x \mapsto \|x\| \end{array}$.

Remarque 1.3 *Réécriture de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2 \quad |\,(x|y)\,| \leqslant \|x\|.\|y\|}$$

Proposition 1.4 *Propriété de la norme euclidienne*

Soit E muni d'un produit scalaire $(\ \ |\ \ )$.

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$
2. $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$
3. *Inégalité triangulaire* : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Proposition 1.5

Soit E muni d'un produit scalaire $(\ \ |\ \ )$.

1. *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire*
   $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si (x,y) est liée positivement :
   $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbf{R}^+, \quad y = \lambda x$.
2. *2ème inégalité triangulaire :*
   $\forall (x,y) \in E^2 \quad |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x+y\|$
3. $\left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|.\|x_k\|$, pour $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels.

Proposition 1.6 *Relations entre produit scalaire et norme euclidienne*

Soit E muni d'un produit scalaire $(\ \ |\ \ )$ et $(x,y) \in E^2$

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,(x|y) + \|y\|^2$
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,(x|y) + \|y\|^2$

• $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ *Identité du parallélogramme*

• $(x|y)=\dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)$ *ou* $(x|y)=\dfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2\right)$ *Identités de polarisation*

2 Orthogonalité

Dans tout ce paragraphe E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\ \ |\ \ )$.

2.1 Familles orthogonale, orthonormée, base orthonormée

Definition 2.1

On dit que x et y sont des vecteurs orthogonaux lorsque $(x|y)=0$.

On note alors $x\perp y$.

Remarque 2.1

• $\forall x\in E,\quad \left(\vec{0}|x\right)=0.$

• Le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à lui-même.

On en déduit que **le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout vecteur** de E.

• Si x est un vecteur orthogonal à chacun des vecteurs $x_1,\dots,x_n$ alors x est orthogonal à toute combinaison linéaire des vecteurs $x_1,\dots,x_n$.

Definition 2.2 *Famille orthogonale*

Soit $x_1,\dots,x_n$ des vecteurs de E.
On dit que $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille orthogonale lorsque $x_1,\dots,x_n$ sont 2 à 2 orthogonaux :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2\quad i\neq j\Rightarrow (x_i|x_j)=0$$

Proposition 2.1

Toute famille orthogonale $(x_1,\dots,x_n)$ de vecteurs non nuls est libre.

Proposition 2.2 **Relations de Pythagore**

Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.

- $x_1 \perp x_2 \iff \|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$
- Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale alors $\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$

Definition 2.3 *Famille orthonormée*

Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E.
On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille orthonormée (ou orthonormale) lorsque $x_1, \dots, x_n$ sont 2 à 2 orthogonaux et unitaires :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad (x_i | x_j) = \delta_{ij}$$

Definition 2.4 *Base orthonormée*

On dit que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E lorsque : $\begin{cases} (e_1, \dots, e_n) \text{ est une base de } E \\ (e_1, \dots, e_n) \text{ est une famille orthonormée} \end{cases}$

Proposition 2.3 *Argument de dimension*

Soit E un espace euclidien.
Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E.

Si $\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \text{ est une famille orthonormée} \\ \text{et } n = dim(E) \end{cases}$ alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormale de E.

Exemple 2.1

La base canonique est une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

2.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Ce procédé permet de construire une famille orthonormée à partir d'une famille libre.

Proposition 2.4

Soit E un espace préhilbertien réel.

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille libre de E alors

1. il existe une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que :
   $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad Vect(e_1, \dots, e_k) = Vect(x_1, \dots, x_k)$.
2. il existe une et une seule famille orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que :
   - $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad Vect(e_1, \dots, e_k) = Vect(x_1, \dots, x_k)$
   - $\forall k \in [\![1,n]\!], \quad (e_k | x_k) > 0$

Formules pratiques :

La famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ obtenue à partir de $(x_1, \ldots, x_n)$ est donnée par les formules :

$e_1 = \dfrac{1}{\|x_1\|} x_1$ $\qquad e_2 = \dfrac{x_2 - (x_2|e_1)\, e_1}{\|x_2 - (x_2|e_1)\, e_1\|}$ et plus généralement

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad e_k = \frac{1}{\|e'_k\|} e'_k \quad \text{où} \quad e'_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|e_i)\, e_i = x_k \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(x_k|e'_i)}{(e'_i|e'_i)} e'_i \ .$$

2.3 Orthogonalité et sous-espaces vectoriels

Dans tout ce paragraphe F et G désignent deux sous-espaces vectoriels de E et X une partie de E.

Definition 2.5 *Sous-espaces orthogonaux*

On dit que F et G sont orthogonaux lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G :

$$\forall x \in F, \quad \forall y \in G \quad (x|y) = 0$$

On note alors $F \perp G$.

Definition 2.6 *Orthogonal d'un sous-espace ou d'une partie*

• On appelle orthogonal de F l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F. On le note $F^\perp$.

$$F^\perp = \{x \in E, \quad \forall y \in F \quad (x|y) = 0\}$$

• On appelle orthogonale d'une partie X de E l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de X. On le note $X^\perp$.

Proposition 2.5

$F^\perp$ et $X^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Exemple 2.2

$E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.

Proposition 2.6 *Propriétés*

Pour F sous-espace vectoriel de E, on a :

$$\boxed{F \perp F^\perp \qquad F \cap F^\perp = \{0\} \quad \text{et} \quad F \subset \left(F^\perp\right)^\perp}$$

Proposition 2.7 *Caractérisation de l'appartenance à $F^\perp$*

On suppose que F est de dimension finie non nulle.

Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F alors :

$$x \in F^\perp \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!] \quad (x|e_i) = 0 \quad (x \perp e_i)$$

Proposition 2.8 *Lien entre sous-espaces vectoriels orthogonaux et orthogonal d'un s.e.v.*
Pour F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

$$F \perp G \iff F \subset G^{\perp} \qquad (\text{ et } G \subset F^{\perp})$$

Proposition 2.9 *Orthogonalité et somme directe*
• Si $F \perp G$ alors $F \cap G = \{0\}$, donc la somme $F + G$ est directe.

• Si $F_1, \ldots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E orthogonaux 2 à 2 alors la somme $F_1 + \ldots + F_n$ est directe.

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans ce paragraphe E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbf{N}^*$.

3.1 Existence de bases orthonormées

Proposition 3.1
Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Proposition 3.2 *Théorème de la base orthonormée incomplète*
Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une famille orthonormée de E alors on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ de E.

Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

3.2 Expressions dans une base orthonormée

Coordonnées, produit scalaire, norme dans une B.O.N.

Soit E un espace euclidien et soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.

Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

• $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad x_i = (x|e_i)$ et donc $x = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i$.

• $(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

• $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Expression matricielle

Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices des vecteurs x et y dans la base orthonormale $\mathcal{B}$.

$$(x|y) =^t XY$$

Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormée

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, si on note $A = (a_{ij}) = M_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E alors

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \quad a_{ij} = (e_i|u(e_j))$$

4 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

4.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 4.1

Soit E un espace préhilbertien réel.

Si F est un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie** alors $E = F \oplus F^\perp$.

On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F et parfois on note $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

Proposition 4.2 *Cas d'un espace euclidien*

Soit E est un espace **euclidien** de dimension $n \in \mathbf{N}^*$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $\begin{cases} E = F \oplus F^\perp \\ dim(F^\perp) = n - dim(F) \\ F = \left(F^\perp\right)^\perp \end{cases}$

4.2 Projection orthogonale

Definition 4.1

Soit E un espace préhilbertien.
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors $E = F \oplus F^\perp$.

On appelle projection orthogonale sur F, la projection sur F dans la direction de $F^\perp$.

On la note $p_F : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ x \mapsto p_F(x) = y \end{array}$ où (y, z) est l'unique élément de $F \times F^\perp$ tel que $x = y + z$.
$p_F(x)$ s'appelle le projeté orthogonal de x sur F.

Remarque 4.1 *Cas euclidien*

Dans le cas d'un espace euclidien, on peut toujours définir la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F.

Proposition 4.3 *Propriétés usuelles d'une projection*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E, si p_F est la projection orthogonale sur F alors :

$$p_F \in \mathscr{L}(E) \qquad Ker(p_F) = F^{\perp} \qquad Im(p_F) = F = \{x \in E, \quad p_F(x) = x\} = Ker(p_F - Id_E)$$

On remarque que $Ker(p_F) = (Im(p_F))^{\perp}$.

Proposition 4.4 *Propriété spécifique à une projection orthogonale*

Si p_F est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F alors :

$$\forall x \in E \quad \begin{cases} p_F(x) \in F \\ \\ x - p_F(x) \in F^{\perp} \end{cases}$$

Proposition 4.5 *Détermination pratique du projeté orthogonal d'un vecteur*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie égale à $p \in \mathbf{N}^*$.

- Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une **base orthonormée** de F alors $\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} (e_k|x)\, e_k$.

- Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une **base quelconque** de F et x un vecteur de E alors $p_F(x)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} p_F(x) \in F \\ \\ x - p_F(x) \in F^{\perp} \end{cases} \quad \text{ce qui équivaut à} \quad \begin{cases} \exists (\alpha_1, \ldots \alpha_p) \in \mathbf{R}^p \text{ tel que} \\ p_F(x) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 + e_2 + \ldots + \alpha_p e_p \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \forall i \in [\![1, p]\!], \quad (x - p_F(x)|e_i) = 0 \end{cases}$$

Exemple 4.1

Soit $F = Vect(e_1, e_2) \subset \mathbf{R}^3$ avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$.
Déterminer le projeté orthogonal du vecteur $x = (1, -1, 1)$ sur F.

Remarque 4.2

On peut aussi définir la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel de dimension finie : c'est la symétrie s_F associée à la projection orthogonale sur F : $s_F = 2p_F - Id_E$.

$s_F : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto y - z \end{array}$ où (y, z) est l'unique couple de $F \times F^{\perp}$ tel que $x = y + z$.

4.3 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et x un vecteur de E.

- L'application $\begin{array}{ccc} F & \to & \mathbf{R} \\ y & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$ admet un minimum.

- Ce minimum est atteint pour $y = p_F(x)$ et uniquement pour ce vecteur.

- Ce minimum est appelé distance du vecteur x au sous-espace vectoriel F et noté $d(x,F)$:

$$\boxed{d(x,F) = \underset{y\in F}{Min}\|x-y\| = \|x-p_F(x)\|}$$

Cette propriété permet de calculer certaines bornes inférieures, on peut en effet écrire, pour F sous-espace vectoriel de dimension finie, $\underset{y\in F}{Inf}\|x-y\|^2 = d^2(x,F) = \|x-p_F(x)\|^2$.

$\|x-p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|^2$ *si E est de dimension finie.*

Exemple 4.2

Déterminer $\underset{(a,b)\in\mathbf{R}^2}{Inf}\displaystyle\int_0^1 (e^t-at-b)^2\mathrm{d}t$.

Cas particulier : Distance à l'hyperplan $Vect(u)^\perp$ en dimension finie

Soit u un vecteur non nul.

- Le projeté orthogonal d'un vecteur x sur l'hyperplan $H = Vect(u)^\perp$ est : $\boxed{p_H(x) = x - \dfrac{(x|u)}{\|u\|^2}u.}$

- La distance d'un vecteur x à l'hyperplan $H = Vect(u)^\perp$ est $\boxed{d(x,H) = \dfrac{|\,(x|u)\,|}{\|u\|}.}$

Exemple 4.3

$\mathbf{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique. Déterminer la distance du vecteur $x = (1,1,-1)$ au plan d'équation $x-y+2z=0$.

5 Formes linéaires sur un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

5.1 Représentation des formes linéaires d'un espace euclidien

Soit $a \in E$, l'application $\begin{array}{l} E \to \mathbf{R} \\ x \mapsto (a|x) \end{array}$ est une forme linéaire par bilinéarité du produit scalaire.
On peut la noter $(a|.)$

Le théorème suivant montre que toutes les formes linéaires sont de ce type là.

Proposition 5.1

> φ est une forme linéaire sur E si et seulement si
>
> il existe un vecteur a de E tel que $\forall x \in E, \quad \varphi(x) = (x|a)$.
>
> Le vecteur a est unique.

On note E^* l'espace des formes linéaires sur E, appelé espace dual de E. L'application $\begin{array}{l} E \to E^* \\ a \mapsto (a|.) \end{array}$ est un isomorphisme.

5.2 Hyperplans d'un espace euclidien

Definition 5.1 *Vecteur normal à un hyperplan*
Soit H un hyperplan de E.

On appelle vecteur normal à l'hyperplan H tout vecteur non nul appartenant à $H^\perp$.

On sait que $dim(H^\perp) = dim(E) - dim(H) = 1$, donc $H^\perp$ est une droite et donc :

> a est un vecteur normal à H **ssi** $H^\perp = Vect(a) = \mathbf{R}a$.

Proposition 5.2 *Equation d'un hyperplan dans une base orthonormée*
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $a \neq 0$.

> H est un hyperplan de vecteur normal $a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ **ssi** H a pour équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.