Exercice 1

Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad tr(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{tr(A^T A)}$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 2

Pour f et g dans $E = C^2([0,1], \mathbf{R})$ on pose $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.
2. On pose $F = \{f \in E, \quad f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E, \quad f'' - f = 0\}$.
   Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux dans E.

Exercice 3

Soit $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ une famille de vecteurs unitaires distincts d'un espace euclidien E de dimension n telle que :

$$\exists a \in \mathbf{R}, \quad \forall i \neq j \quad \langle u_i, u_j \rangle = a$$

1. Montrer que $a \neq 1$, puis que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 0$ et $a = -\dfrac{1}{n}$.

Exercice 4

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace eulcidien.
Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, puis $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 5

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x \rangle^2$$

1. Montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]^2 \quad \|e_i\| \leqslant 1$.
2. Soit x un vecteur unitaire et orthonal à $Vect(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Calculer $\langle x, e_n \rangle^2$ et en déduire $\|e_n\|$.
3. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 6

Pour P et Q dans $\mathbf{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$, que l'on note $\langle ., . \rangle$
   Calculer $\langle X^k, 1 \rangle$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.
2. On note Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = vect(X, X^2, \ldots, X^n)$. Justifier qu'il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $Q = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

3. On pose $P = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \prod_{j=1}^{k} (X + j)$.
   Calculer $\langle 1-Q, X^i \rangle$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$; en déduire $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad P(i) = 0$ puis une expression de P.
4. Montrer que $\underset{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbf{R}^n}{Inf} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n X^n)^2 e^{-t} \mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 7

Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels et $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ pour P et Q dans $\mathbf{R}_n[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$; on suppose cette condition réalisée par la suite.
2. Trouver $F^{\perp}$ pour $F = \left\{ P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
3. Calculer la distance de X^n à F.