Problème 1 : Extrait de CNM PSI 2021

On admet qu'il existe $\gamma \in]0,1[$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I - Fonction zêta de Riemann

On considère la fonction réelle ζ définie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $]0,+\infty[$ les fonctions réelles φ_n et ψ_n par :

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \psi_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$$

1. Soit n un entier naturel non nul et x un réel de $]0,+\infty[$, par décroissance de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{1}{t^x} = e^{-x\ln(t)}$ sur $[1,+\infty[$, on a :

$$\forall t \in [n, n+1] \quad \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x}$$

et par intégration sur le segment $[n, n+1]$:

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{n^x}\mathrm{d}t$$

on multiplie par (-1) et on additionne $\dfrac{1}{n^x}$ pour obtenir :

$$\boxed{0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \psi_n(x)}$$

2. Pour x dans $]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^x} = \lim_{n\to+\infty} e^{-x\ln(n)} = 0$, donc la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. On en déduit que la série télescopique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \psi_n(x)$ converge.

Par comparaison la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \varphi_n(x)$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} \varphi_n \text{ converge donc simplement sur }]0,+\infty[.}$$

On note ainsi pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x)$.

3. Pour montrer que φ est continue sur $]0,+\infty[$, on va utiliser le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, on va donc vérifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, φ_n est continue sur $]0,+\infty[$ et que la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ ou sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.

• Étude de la continuité de φ_n

1ère méthode : par continuité de fonctions usuelles

$\varphi_n(1) = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)$.

$$\begin{aligned} \forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad \varphi_n(x) &= \frac{1}{n^x} - \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_n^{n+1} \\ &= \frac{1}{n^x} - \frac{(n+1)^{1-x} - n^{1-x}}{1-x} \\ \varphi_n(x) &= \frac{1}{n^x} - \frac{e^{(1-x)\ln(n+1)} - e^{(1-x)\ln(n)}}{1-x} \end{aligned}$$

On en déduit que φ_n est continue sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ par somme, composées et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur ces intervalles. De plus

$$\begin{aligned} \frac{e^{(1-x)\ln(n+1)} - e^{(1-x)\ln(n)}}{1-x} &\underset{x\to 1}{=} \frac{1 + (1-x)\ln(n+1) - 1 - (1-x)\ln(n) + o(1-x)}{1-x} \\ &\underset{x\to 1}{=} \ln(n+1) - \ln(n) + o(1) \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} \varphi_n(x) = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) = \varphi_n(1)$.

La fonction φ_n est donc continue sur $]0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

2nde méthode : avec les intégrales à paramètre

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u : (x,t) \mapsto \dfrac{1}{t^x} = e^{-x\ln(t)}$.

$\forall x \in]0,+\infty[\quad t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur le segment $[n, n+1]$.
$\forall t \in [n,n+1] \quad x \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
$\forall x \in]0,+\infty[\quad \forall t \in [n,n+1] \quad |u(x,t)| = e^{-x\ln(t)} \leqslant 1$ et la fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[n,n+1]$ puisque continue sur ce segment.
Par théorème de continuité pour une intégrale à paramètre, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{t^x}\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.
Alors par différence de deux fonctions continues, la fonction $\varphi_n : x \mapsto \dfrac{1}{n^x} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{t^x}\mathrm{d}t$ est continue sur $]0,+\infty[$.

• Étude de la convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ de $\sum \varphi_n$

Pour tout $x \in]0,+\infty[$ on a $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \psi_n(x)$ et les séries numériques $\sum \varphi_n(x)$ et $\sum \psi_n(x)$ convergent, alors

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \psi_k(x)$$

Ce qui donne par télescopage

$$\forall x \in]0,+\infty[\quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$, $\forall x \in [a,b] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^a}$

En notant $R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$, on obtient que la fonction R_n est bornée sur $[a,b]$ et

$$0 \leqslant \|R_n\|_\infty^{[a,b]} = \underset{x\in[a,b]}{Sup}\,|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$$

Et par théorème d'encadrement, puisque $a > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{[a,b]} = 0$.

On en déduit que la série de fonctions $\sum \varphi_n$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

Par théorème de continuité pour la somme d'une série de fonctions, on sait alors que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$$

4. On considère la fonction K définie sur $]1,+\infty[$ par $K(x) = \zeta(x) + \dfrac{1}{1-x}$.
   (a) Pour tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

par convergence des séries et intégrales de Riemann et relation de Chasles

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t \\ &= \zeta(x) - \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{+\infty} \end{aligned}$$

or $1-x<0$ donc

$$\varphi(x) = \zeta(x) + \frac{1}{1-x}$$

$$\boxed{\text{On a bien } \forall x \in]1,+\infty[\quad K(x) = \varphi(x).}$$

(b) La fonction φ étant continue sur $]0,+\infty[$, elle est particulièrement continue en 1, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} K(x) = \lim\limits_{x\to 1+} \varphi(x) = \varphi(1) \in \mathbf{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } K \text{ admet une limite finie quand } x \text{ tend vers 1 à droite.}}$$

(c) On déduit de ce qui précède que $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\zeta(x) + \dfrac{1}{1-x}\right) = \varphi(1)$. Or $(1-x)\varphi(1) \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} 0$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} ((1-x)\zeta(x)+1) = 0$, ce qui donne

$$\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1} \text{ et donc } \lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$$

Partie II : Fonction zêta alternée

Pour tout entier naturel non nul n, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

5. Pour $x \in]0,+\infty[$, la suite positive $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante de limite nulle, donc par le critère spécial des séries alternées, la série alternée $\sum f_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} f_n \text{ converge simplement sur }]0,+\infty[.}$$

On définit ainsi la fonction f sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

6. $\forall x \in]0,+\infty[\quad |f_n(x)| = \dfrac{1}{n^x}$ et pour $n \in \mathbf{N}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n^x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}$ donc

$$\|f_n\|_\infty^{]0,+\infty[} = \underset{x\in]0,+\infty[}{Sup} |f_n(x)| = \frac{1}{n^0} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$, et donc $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ ne peut pas converger uniformément sur }]0,+\infty[.}$

7. Soit $\alpha > 0$.
$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [\alpha,+\infty[\quad f_n(x) = (-1)^n e^{-x\ln(n)}$ donc f_n est de classe C^1 sur $[\alpha,+\infty[$ avec

$$f_n'(x) = (-1)^n(-\ln(n))e^{-x\ln(n)} = \frac{(-1)^{n-1}\ln(n)}{n^x}$$

Pour $x \in [\alpha,+\infty[\quad \lim\limits_{n\to+\infty} |f_n'(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^x} = 0$ par croissances comparées puisque $\alpha > 0$.

La fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ avec

$$g_x'(t) = \frac{1}{t^{x+1}} - x\frac{\ln(t)}{t^{x+1}} = \frac{1-x\ln(t)}{t^{x+1}}$$

On en déduit que

$$\forall t \geqslant e^{\frac{1}{\alpha}} \quad \forall x \in [\alpha, +\infty[\quad 1 - x\ln(t) \leqslant 1 - \alpha\ln(t) \leqslant 0$$

et donc $\forall t \geqslant e^{\frac{1}{\alpha}} \quad \forall x \in [\alpha, +\infty[\quad g_x'(t) \leqslant 0$, ce qui donne :

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}^* \quad (n_0 = 1 + \lfloor e^{\frac{1}{\alpha}} \rfloor) \quad \forall x \in [\alpha, +\infty[\quad g_x \text{ est décroissante sur } [n_0, +\infty[$$

et donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall x \in [\alpha, +\infty[$ la suite $(|f_n'(x)|)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante et de limite nulle.
Alors par critère spécial des séries alternées, la série alternée $\sum f_n'(x)$ converge avec

$$\forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in [\alpha, +\infty[\quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n'(x) \right| \leqslant |f_{n+1}'(x)| \leqslant |f_n'(x)| \leqslant \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$$

La fonction $R_n' : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$ est donc bornée sur $[\alpha, +\infty[$, pour $n \geqslant n_0$ avec

$$0 \leqslant \|R_n'\|_\infty^{[\alpha,+\infty[} = \underset{x \in [\alpha,+\infty}{Sup} |R_n'(x)| \leqslant \frac{\ln n}{n^\alpha}$$

Or $\alpha > 0$ donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ par croissances comparées et par encadrement $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|R_n'\|_\infty^{[\alpha,+\infty[} = 0$.

La suite de fonctions $(R_n')_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[\alpha, +\infty[$, ce qui signifie que $\boxed{\text{la série de fonctions } \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } [\alpha, +\infty[.}$

8. On a vu :

- $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad f_n$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
- La série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tous les intervalles $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.

Alors par le théorème de classe C^1 pour les séries de fonctions, on sait que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(n)}{n^x}$$

9. Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x de $]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} &= \sum_{k=1, k\text{pair}}^{2n} \frac{1}{k^x} + \sum_{k=1, k\text{impair}}^{2n} \frac{1}{k^x} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^x} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)^x} \\
\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^x} &= \frac{1}{2^x} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)^x}
\end{aligned}$$

10. De même pour tout entier naturel non nul n et tout réel x de $]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x} &= \sum_{k=1,k\text{pair}}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x}+\sum_{k=1,k\text{impair}}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x}\\ &= \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{2p}}{(2p)^x}+\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{2p-1}}{(2p-1)^x}\\ \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x} &= \frac{1}{2^x}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^x}-\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p-1)^x}\end{aligned}$$

11. Pour tout réel x de $]1,+\infty[$ $\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x}$. Et d'après les résultats des deux questions précédentes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x} &= 2^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^x}-2^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}\right)\\ \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x} &= 2^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^x}+2^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}\qquad(*)\end{aligned}$$

Puisque pour $x>1$, la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^x}$ converge et la série alternée $\sum\frac{(-1)^n}{n^x}$ converge, on a par passage à la limite sur l'égalité $(*)$:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k^x}=2^{-x}\zeta(x)-\zeta(x)+2^{-x}\zeta(x)=(2\times2^{-x}-1)\zeta(x)$$

$$\boxed{\text{On a donc bien } \forall x\in]1,+\infty[\quad f(x)=(2^{1-x}-1)\zeta(x).}$$

12. (a) On sait que $e^u \underset{u\to0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$ alors

$$2^{1-x}-1=e^{(1-x)\ln(2)}-1\underset{x\to1^+}{=}-\ln(2)(x-1)+\frac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2+o((x-1)^2))$$

(b) On a vu en question 4(b)-(c) : $\lim_{x\to1^+}\left(\zeta(x)+\frac{1}{1-x}\right)=\varphi(1)$, alors

$\zeta(x)\underset{x\to1^+}{=}\frac{1}{x-1}+\varphi(1)+o(1)$, or

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n(1)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right)
\end{aligned}$$

et par le résultat admis en début d'énoncé

$$\varphi(1) = \gamma$$

On en déduit que $\zeta(x) \underset{x\to1^+}{=} \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ et par produit

$$\begin{aligned}
f(x) &= (2^{1-x}-1)\zeta(x) \\
&\underset{x\to1^+}{=} -\ln(2) + \frac{\ln^2 2}{2}(x-1) - \gamma(x-1)\ln 2 + o(x-1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc } f(x) \underset{x\to1^+}{=} -\ln(2) + \frac{\ln 2}{2}\left(\ln(2) - 2\gamma\right)(x-1) + o(x-1).}$$

13. Puisque f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, on sait que le développement limité à l'ordre 1 de f est donné par :

$$f(x) \underset{x\to1}{=} f(1) + f'(1)(x-1) + o(x-1)$$

Et par unicité de ce développement limité on a donc $f(1) = -\ln(2)$ et $f'(1) = \dfrac{\ln 2}{2}(\ln(2) - 2\gamma)$,

ce qui donne $\boxed{-f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2) \text{ et } f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln 2}{2}(\ln(2) - 2\gamma)}$

Problème 2 : Extrait de Centrale PSI 2013

Dans tout ce problème, p désigne un entier naturel non nul.

$\mathbf{R}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
$\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.
I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.
$GL_p(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$.
Si A est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$, on note u_A l'endomorphisme de $\mathbf{R}^p$ canoniquement associé à la matrice A, et par abus de notation, $Ker(A) = Ker(u_A)$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ on définit, lorsque la limite existe,

$$E(A) = \lim_{n\to+\infty} \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$$

14. Soit x réel,
   - si $x = 0$ alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = 1^n = 1$ et $e^x = e^0 = 1$, par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{0}{n}\right)^n = e^0$,
   - si $x \in \mathbf{R}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right) = 1 > 0$ et donc

   $$\exists n_0 \in \mathbf{N}^* \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{x}{n})\right)$$

   Par développement limité de $\ln(1+u)$ pour u au voisinage de 0, on peut écrire :

   $$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(x - \frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

   On en déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$.

   Finalement $\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x.}$

15. Soit $D \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ une matrice diagonale.

   (a) Notons $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{pmatrix}$, alors $I_p + \dfrac{1}{n}D = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{d_1}{n} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1+\dfrac{d_p}{n} \end{pmatrix}$ et par produit de matrices diagonales,

   $$\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n = \begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{d_1}{n}\right)^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \left(1+\dfrac{d_p}{n}\right)^n \end{pmatrix}$$

   On sait qu'une suite de matrices (A_n) converge vers une matrice A si et seulement si toutes les suites des coefficients de A_n convergent respectivement vers les coefficients de la matrice A, par conséquent, en utilisant le résultat de la question préliminaire, $\underline{E(D) \text{ existe}}$ et on a :

   $$E(D) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{d_1}{n}\right)^n & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{d_p}{n}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_p} \end{pmatrix}$$

   On en déduit que $det(E(D) = \prod\limits_{k=1}^{p} e^{d_k} \neq 0$ donc la matrice $E(D)$ est inversible.

$$\boxed{E(D) = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_p} \end{pmatrix} \text{ et } E(D) \in Gl_p(\mathbf{R})}$$

(b) $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale, alors $\forall k \in \mathbf{N} \quad D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p^k \end{pmatrix}$

et pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{q} a_k X^k$, on aura

$$Q(D) = \sum_{k=0}^{q} a_k D^k = \sum_{k=0}^{q} a_k \begin{pmatrix} d_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{q} a_k d_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum_{k=0}^{q} a_k d_p^k \end{pmatrix}$$

Donc $Q(D) = \begin{pmatrix} Q(d_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q(d_p) \end{pmatrix}$, on en déduit que Q est un polynôme qui vérifie $E(D) = Q(D)$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, p]\!], \quad Q(d_k) = e^{d_k}$.

<u>1ère méthode : Avec les polynômes d'interpolation de Lagrange</u>

On sait d'après le cours que si $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ sont des réels distincts deux à deux, alors on peut définir les polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_q$ associés à ces réels et que $(L_1, \dots, L_q)$ est une base de $\mathbf{R}_{q-1}[X]$ avec $\forall P \in \mathbf{R}_{q-1}[X] \quad P = \sum_{k=1}^{q-1} P(\alpha_k) L_k$.

Notons q le nombre de coefficients diagonaux de D distincts deux à deux et notons ces coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_q$. On a ainsi :
$1 \leqslant q \leqslant p$ et $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \exists! j \in [\![1, q]\!]$ tel que $d_i = \alpha_j$.

Notons alors $L_1, \dots, L_q$ les polynômes de Lagrange associés aux réels distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_q$, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [\![1, q]\!], \quad L_k(X) = \prod_{r=1, r \neq k}^{q} \frac{X - \alpha_r}{\alpha_k - \alpha_r}$$

On sait alors que : $\forall (k, j) \in [\![1, q]\!]^2, \quad L_k(\alpha_j) = \delta_{kj} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{array} \right.$.

Le polynôme $Q(X) = \sum_{k=1}^{q} e^{\alpha_k} L_k(X)$ vérifie donc $\forall j \in [\![1, q]\!], \quad Q(\alpha_j) = e^{\alpha_j}$.

On en déduit que

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \exists! j \in [\![1, q]\!], \quad d_i = \alpha_j \text{ et donc } Q(d_i) = Q(\alpha_j) = e^{\alpha_j} = e^{d_i}$$

ce qui entraine

$$Q(D) = \begin{pmatrix} Q(d_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & Q(d_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_p} \end{pmatrix} = E(D)$$

$\boxed{\text{Il existe donc un polynôme } Q \in \mathbf{R}[X] \text{ tel que } Q(D) = E(D).}$

2nde méthode : Avec une matrice de Vandermonde

On cherche un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, d]\!] \quad Q(d_k) = e^{d_k}$. On cherche donc un entier naturel r et des réels $a_0, \ldots, a_r$ tels que

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad a_0 + a_1 d_k + a_2 d_k^2 + \ldots + a_r d_k^r = e^{d_k}$$

Ce qui nous donne un système linéaire d'inconnues $a_0, \ldots, a_r$ qui s'écrit sous forme matricielle :

$$A.X = Y \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e^{d_1} \\ e^{d_2} \\ \vdots \\ e^{d_p} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_1^2 & \ldots & \ldots & d_1^r \\ 1 & d_2 & d_2^2 & \ldots & \ldots & d_2^r \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & d_p & d_p^2 & \ldots & \ldots & d_p^r \end{pmatrix}$$

On remarque que A ressemble à une matrice de Vandermonde, mais elle n'est pas forcément carrée. Pour qu'elle soit carrée on doit avoir $r + 1 = p$. Dans ce cas son déterminant sera égal à $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (d_i - d_j)$, qui est non nul si et seulement si tous les réels $d_1, \ldots, d_p$ sont distincts deux à deux, ce qui n'est pas forcément le cas ici.

Notons alors q le nombre de coefficients diagonaux de D distincts deux à deux et notons ces coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. On a ainsi :
$1 \leqslant q \leqslant p$ et $\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \exists! \ell \in [\![1, q]\!]$ tel que $d_i = \alpha_\ell$ et donc $e^{d_i} = e^{\alpha_\ell}$.

Alors en prenant $r = q - 1$, on aura

$$AX = Y \iff BX = Y' \quad \text{avec} \quad Y' = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} \\ e^{\alpha_2} \\ \vdots \\ e^{\alpha_q} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \ldots & \alpha_1^{q-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \ldots & \alpha_2^{q-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \alpha_q & \alpha_q^2 & \ldots & \ldots & \alpha_q^{q-1} \end{pmatrix}$$

La matrice B est carrée d'ordre q et est de déterminant de Vandermonde égal à $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant j \leqslant q} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0$, B est donc inversible et

$$AX = Y \iff BX = Y' \iff X = B^{-1} Y'$$

$\boxed{\text{il existe donc des réels } a_0, \ldots, a_r \ (r = q - 1) \text{ tels que } Q = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k \text{ vérifie } Q(D) = E(D).}$

(c) Si $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p \end{pmatrix}$ et si $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_p \end{pmatrix}$ alors $D+\Delta = \begin{pmatrix} d_1+\alpha_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_p+\alpha_p \end{pmatrix}$ donc par le résultat de la question 15(a)

$$\begin{aligned} E(D+\Delta) &= \begin{pmatrix} e^{d_1+\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_1+\alpha_1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{d_1}.e^{\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_p}.e^{\alpha_p} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{d_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{d_p} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\alpha_p} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } E(D+\Delta) = E(D).E(\Delta)}$$

16. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ une matrice diagonalisable.

(a) Puisque A est diagonalisable, on sait qu'il existe une matrice $P \in GL_p(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale D telles que $A = P.D.P^{-1}$, alors

$$I_p + \frac{1}{n}A = P.I_p.P^{-1} + P.\frac{1}{n}D.P^{-1} = P\left(I_p + \frac{1}{n}D\right).P^{-1}$$

et par récurrence on obtient :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^k = P.\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^k.P^{-1}$$

donc $\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = P.\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n.P^{-1}$.

D'après les propriétés sur la convergence des suites de matrices dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ (vu en exercice mais qui sera fait plus tard dans le cours), on sait que si $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de matrices qui converge vers une matrice B alors la suite $(PB_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $P.B$ et la suite de matrices $(P.B_n.P^{-1})_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la matrice $P.B.P^{-1}$.

La matrice D étant diagonale on sait que $E(D) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}D\right)^n$ existe alors $E(A)$ existe et

$$\boxed{\begin{array}{c} E(A) = \lim_{n\to+\infty}\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n = P.E(D).P^{-1} = P.\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_p} \end{pmatrix}.P^{-1} \\ \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_p \text{ les valeurs propres (non distinctes) de } A. \end{array}}$$

(b) Avec les résultats et notations de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
det(E(A)) &= det\left(P.\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_p}\end{pmatrix}.P^{-1}\right) \\
&= det(P).det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_p}\end{pmatrix}.det\left(P^{-1}\right)) \\
&= det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_p}\end{pmatrix} \\
&= \prod_{k=1}^{p} e^{\lambda_k} \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k\right) \\
& \text{A étant diagonalisable on obtient} \\
det(E(A)) &= e^{tr(A)}
\end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbf{R}$, avec les notations et résultats de la question 16(a), on a : $(xI_p + A) = P.(xI_p + D).P^{-1}$ avec $xI_p + D$ matrice diagonale, donc $xI_p + A$ est diagonalisable et d'après 16(a) appliquée à $xI_p + A$, $E(xI_p + A)$ existe et

$$E(xI_p + A) = P.E(xI_p + D).P^{-1}$$

xI_p et D sont diagonales alors par la question 15 : $E(xI_p + D) = E(xI_p).E(D)$ et $E(xI_p) = \begin{pmatrix} e^{x} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{x}\end{pmatrix} = e^x I_p$ ce qui donne avec 16(a) :

$$\boxed{E(xI_p + A) = P.e^x E(D).P^{-1} = e^x (P.E(D).P^{-1}) = e^x E(A)}$$

17. Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbf{R})$ deux matrices diagonalisables. On suppose que A et B commutent.

(a) A et B sont diagonalisables et commutent alors u_A et u_B les endomorphismes de $\mathbf{R}^p$ canoniquement associés à ces matrices sont diagonalisables et commutent.

On sait que $\mathbf{R}^p$ est égale à la somme directe des sous-espaces propres de u_A :

$$\mathbf{R}^p = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} Ker(u_A - \lambda Id_{\mathbf{R}^p})$$

notons $E_\lambda(A) = Ker(u_A - \lambda Id_{\mathbf{R}^p})$.

u_B commute avec u_A alors u_B commute avec $u_A - \lambda Id_{\mathbf{R}^p}$, $E_\lambda(A)$ est donc stable par u_B qui induit un endomorphisme $v_B(\lambda)$ sur $E_\lambda(A)$. u_B est diagonalisable alors l'endomorphisme induit $v_B(\lambda)$ est aussi diagonalisable, il existe donc une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(A)$ formée de vecteurs propres de u_B.

On en déduit que la juxtaposition des bases $\mathcal{B}_\lambda$, quand λ varie dans $Sp(A)$, forme une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^p = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$, et que c'est une base de vecteurs propres de u_B.
Comme chaque vecteur de cette base est dans un sous-espace propre de u_A, $\mathcal{B}$ est aussi une base formée de vecteurs propres de u_A.

Si on note P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^p$ à cette nouvelle base $\mathcal{B}$ on aura :

- $P^{-1}BP$ est une matrice diagonale puisque $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u_B et
- $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale puisque $\mathcal{B}$ est aussi une base de vecteurs propres de u_A.

(b) Notons alors $D_A = P^{-1}AP$ et $D_B = P^{-1}BP$, on aura $A+B = P.(D_A + D_B).P^{-1}$, donc $A+B$ est diagonalisable et $E(A+B)$ existe avec

$$E(A{+}B) = P.E(D_A{+}D_B).P^{-1} = P.E(D_A)E(D_B).P^{-1} = (P.E(D_A).P^{-1}).(P.E(D_B).P^{-1})$$

donc $E(A+B) = E(A).E(B)$, et $E(A+B) = E(B+A) = E(B).E(A)$.

$$\boxed{\text{On a montré que } E(A+B) \text{ existe avec } E(A+B) = E(A).E(B) = E(B).E(A)}$$

Fin du corrigé