1 Ensembles dénombrables et familles sommables

1.1 Notions sur les ensembles dénombrables

Definition 1.1

1. Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il est existe une bijection de $\mathbf{N}$ dans E.
   L'ensemble E peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n, i \in \mathbf{N}\}$ avec des x_n distincts.

   En considérant la bijection réciproque, E est dénombrable **ssi** *il existe une bijection de E dans $\mathbf{N}$.*

2. Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** lorsqu'il est fini ou dénombrable.
   E peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ avec des x_i distincts et $I = \mathbf{N}$ ou $[\![1, n]\!]$.

Proposition 1.1

Soient E et F deux ensembles.
Si E est dénombrable et s'il existe une bijection de E dans F alors F est dénombrable.

Proposition 1.2

1. Toute partie de $\mathbf{N}$ est au plus dénombrable.
2. Toute partie A d'un ensemble dénombrable E au plus dénombrable.

Exemple 1.1

• $\mathbf{N}^*$ est dénombrable.

• Soit $k \in \mathbf{N}^*$, l'ensemble des entiers naturels des multiples de k est dénombrable et l'ensemble des diviseurs de k est fini.

Proposition 1.3

L'application $u : n \in \mathbf{N} \mapsto \begin{cases} -\dfrac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n+1}{2} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ réalise une bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$.

$$\boxed{\mathbf{Z} \text{ est dénombrable.}}$$

Proposition 1.4

L'application $u : (i, k) \in \mathbf{N}^2 \mapsto 2^k(2i + 1)$ est une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}^*$.

$$\boxed{\mathbf{N}^2 \text{ est dénombrable.}}$$

Corollaire 1.5

Tout produit cartésien de deux ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

1.2 Notions sur les familles sommables

On admet qu'à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ on sait associer sa somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty]$, et que pour tout découpage en paquets de I : $I = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$, c'est-à-dire $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n$ avec $I_n \cap I_m = \varnothing$ si $n \neq m$

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right)$$

En fait on pose comme définition : $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = Sup\left\{\sum_{j\in J} x_j,\quad J \text{ partie finie de } I\right\} \in [0,+\infty]$.

Definition 1.2

1. La famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est dite **sommable** lorsque :

$$\sum_{i\in I} x_i < \infty$$

   En pratique on peut découper, calculer et majorer les sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité

2. Une famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ de complexes est dite **sommable** lorsque la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

Remarque 1.1

La sommabilité d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum u_n$ associée.

Exemple 1.2

- La famille $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est sommable, la famille $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne l'est pas.
- La famille $\left(\dfrac{1}{(i+j+1)^2}\right)_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ n'est pas sommable.
- La famille $(R_{p,q})_{(p,q)\in\mathbf{N}^2}$, avec $R_{p,q} = \begin{cases} \dfrac{1}{q!} & \text{si } p \leqslant q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$, est sommable.

Proposition 1.6

Soient deux familles au plus dénombrables $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$.

Si $\forall i \in I \quad |x_i| \leqslant y_i$ et si $(y_i)_{i\in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 1.7

Les sommes de familles sommables se manipulent grâce aux propriétés suivantes :

Soient deux familles sommables $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$.

- **Croissance :** Si $\forall i \in I \quad x_i \leqslant y_i$ alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.

- **Linéarité :** $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $(x_i + \lambda y_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i + \lambda y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \lambda \sum_{i\in I} y_i$.

- **Sommation par paquets :** Pour tout recouvrement disjoints $(I_k)_{k\in K}$ de I la famille $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)$.

- **Théorème de Fubini :**

Si $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable alors les familles $\displaystyle\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)_{j\in J}$ et $\displaystyle\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ le sont et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right)$$

- **Produit de sommes**

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles sommables alors $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ l'est et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)$$

2 Espaces probabilisables

2.1 Univers d'une expérience aléatoire

Definition 2.1 *Expérience aléatoire et univers*

1. On appelle expérience aléatoire toute expérience, expérience matérielle ou expérience de pensée, susceptible a priori de résultats différents quand on la répète.

2. L'ensemble des issues (ou résultats possibles) d'une expérience aléatoire est appelé **univers**, noté en général Ω.

Exemple 2.1

1. L'expérience d'un lancer de dé à 6 faces peut conduire à 6 résultats selon la face obtenue. Pour modéliser un tel lancer, on peut donc choisir pour univers Ω l'ensemble $[\![1, 6]\!]$.

2. L'expérience du tirage de 2 boules successivement avec remise dans une urne contenant des boules noires et des boules blanches peut conduire à 4 résultats : NN, NB, BN et BB si on choisit d'associer « N » à la couleur noire et « B » à la couleur blanche. Oon peut choisir pour univers Ω l'ensemble des 2-listes de $E = \{N, B\}$.
3. On lance une pièce jusqu'à obtenir Pile.
   On peut définir Ω par $\Omega = \{P\} \cup \{(F_1, \ldots, F_n, P), \quad n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{(F_n)_{n\in\mathbf{N}}\}$. Cet ensemble Ω est infini mais dénombrable.

4. On tire un réel compris entre 0 et 1. L'univers Ω est l'intervalle $[0, 1]$ qui n'est pas dénombrable.

Dorénavent on considère que l'univers Ω est au plus dénombrable (*on dit aussi que Ω est discret*).

Lorsque Ω est un ensemble fini, une probabilité est une application définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier à valeurs dans $[0, 1]$ qui vérifie : $\mathcal{P}(\Omega) = 1$, $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Lorsque Ω n'est pas fini, une probabilité est une application qui n'est pas nécessairement définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ tout entier, mais qui n'agit que sur certaines parties de Ω qui constituent une tribu sur Ω.

2.2 Tribu sur Ω

Definition 2.2

On appelle tribu (ou σ-algèbre) sur l'univers Ω, toute partie $\mathscr{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ qui vérifie :

- $\Omega \in \mathscr{A}$
- $\forall A \in \mathscr{A}, \quad \overline{A} \in \mathscr{A}$ où $\overline{A} = \Omega \backslash A$ (*stabilité par passage au complémentaire*)
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{A}$ (*stabilité par réunion dénombrable*)

Le couple $(\Omega, \mathscr{A})$ est appelé un espace probabilisable.

Exemple 2.2

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω.
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.
- Si A est une partie de Ω alors $\mathscr{A} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω, appelée la tribu engendrée par la partie A. C'est la plus petite tribu contenant la partie A.

Proposition 2.1

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, alors :

- $\varnothing \in \mathscr{A}$.

- La tribu $\mathscr{A}$ est stable par intersection dénombrable :
  $\forall (A_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbf{N}} \quad \bigcap_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathscr{A}$.
- $\mathscr{A}$ est stable par réunion et intersection finies :
  Si $A_1, \ldots, A_p$ sont dans $\mathscr{A}$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_p \in \mathscr{A}$ et $A_1 \cap \cdots \cap A_p \in \mathscr{A}$.

Dans tout ce qui suit $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω.

Vocabulaire probabiliste

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.

- Tout élément de la tribu $\mathscr{A}$ est appelé événement.

- Ω est appelé événement certain.
  $\varnothing$ est appelé événement impossible.

- Soit $\omega \in \Omega$, si $\{\omega\} \in \mathscr{A}$, on dit que $\{\omega\}$ est un événement élémentaire.

  Soient A et B deux événements.

- $\overline{A}$ est appelé événement contraire de A.

- $A \cup B$ est l'évènement $\ll A$ ou $B \gg$, $A \cap B$ est l'événement $\ll A$ et $B \gg$.

- A et B sont dits **incompatibles** lorsque $A \cap B = \varnothing$.

- On dit que l'événement A *implique* l'événement B lorsque $A \subset B$.

Definition 2.3 **Système complet d'événements**

1. Cas fini : Soient $A_1, \ldots, A_n$ n évènements .
   On dit que $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements lorsque $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ et $A_1, \ldots, A_n$ sont incompatibles deux à deux :
   $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

2. Cas dénombrable : Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements.
   $(A_n)_{n\in_n n}$ est un système complet d'événements lorsque : $\begin{cases} \Omega = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n \\ \forall (i,j) \in \mathbf{N}^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}$.

Exemple 2.3

1. Soit Ω un ensemble et $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω.
   Si $A \in \mathscr{A}$ alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements.
2. On lance une pièce de monnaie une infinité de fois. On note :
   A_0 :$\ll$ On n'obtient jamais Pile $\gg$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, A_n :$\ll$ On obtient Pile au $n^{\text{ième}}$ lancer.$\gg$
   $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas un système complet d'événements.

Notons $B_0 = A_0$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, B_n :≪ On obtient Pile pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer≫. $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un système complet d'événements.

3 Probabilité sur un espace probabilisable

Definition 3.1 *Cas d'un univers fini*

Si Ω est un univers fini, on appelle probabilité toute application $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemple 3.1 *Probabilité uniforme*

Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est un univers fini, alors l'application $P : A \in \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \dfrac{|A|}{|\Omega|}$ est une probabilité appelée probabilité uniforme.
On remarque qu'alors $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad P(\{\omega_k\}) = \dfrac{1}{|\Omega|}$.

Definition 3.2 *Cas d'un univers au plus dénombrable*

Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur l'univers Ω, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$

toute application $P : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ qui vérifie :
- $P(\Omega) = 1$

- P est σ-additive : si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements deux à deux incompatibles, alors $\sum P(A_n)$ converge et $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ s'appelle un espace probabilisé.

Definition 3.3 *Vocabulaire*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
- Pour tout événement $A \in \mathscr{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A.

- Un événement A de probabilité 1 est dit est presque sûr ou presque certain.

- Un événement A de probabilité nulle est dit négligeable ou presque impossible.

Proposition 3.1 **Propriétés d'une probabilité**

On considère $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
- $P(\varnothing) = 0$,
- si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

- si A est un événement alors $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,

- si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$ alors $\begin{cases} P(B \backslash A) = P(B) - P(A) \\ P(A) \leqslant P(B) \end{cases}$
- si A et B sont deux événements alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- **Continuité croissante**

  Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$ alors
  $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$
- **Continuité décroissante**

  Si $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$ alors
  $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$
- **Sous additivité** :

  Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'événements.
  $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Exemple 3.2 *Application*

• On lance une pièce de monnaie une infinité de fois.
On note A l'événement : ≪obtenir FACE à tous les lancers≫.
En introduisant les événements A_n : ≪les n premiers lancers donnent FACE≫, déterminer la probabilité de l'événement A. Que peut-on en conclure ?

• Pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

4 Conditionnement

Dans toute cette partie $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est un espace probabilisé.

Definition 4.1 **Probabilité conditionnelle**

Si A et B sont des événements tels que $P(A) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le réel :

$$\boxed{P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}}$$

L'application $P_A : \begin{array}{l} \mathscr{A} \to [0,1] \\ B \mapsto P_A(B) \end{array}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Proposition 4.1 **Formule des probabilités composées**

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements tels que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors

$$\boxed{P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1).P_{A_1}(A_2).P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Exemple 4.1

On tire successivement sans remise trois boules dans une urne qui contient 3 boules rouges et 5 boules noires indiscernables au toucher. Quel est la probabilité d'obtenir dans cet ordre Noire, Rouge, Noire ?

Proposition 4.2 **Formule des probabilités totales**

Si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un système complet d'événements, alors pour tout évènement B la série $\sum P(B \cap A_n)$ converge et

$$\boxed{P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).P_{A_n}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).P(B|A_n)}$$

en adoptant la convention $P_{A_n}(B).P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.

Remarque 4.1 **Extension**

La formule des probabilités totales reste vraie avec une famille $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.

$(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est alors appelé un système *quasi-complet* d'événements.

Proposition 4.3 **Formules de Bayes**

1. Pour deux événements A et B de probabilité non nulle, on peut relier les probabilités $P_A(B)$ et $P_B(A)$, ce qui permet en pratique d'inverser *cause et conséquence* :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} \qquad \textit{Formule de Bayes}}$$

2. Soit I un ensemble au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ est un système quasi-complet d'événements alors pour tout événement B de probabilité non nulle

$$\boxed{\forall k \in I, \quad P_B(A_k) = \frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i).P_{A_i}(B)} \qquad \textit{Formule de Bayes}}$$

Exemple 4.2 *Avec un système complet fini*

Un laboratoire propose un test de dépistage de la grippe porcine H5N1. Des études ont permis d'établir les statistiques suivantes :

— si l'animal est sain, le test est négatif dans $99,8\%$ des cas,

— si l'animal est malade, le test est positif dans $99,9\%$ des cas.

On sait d'autre part qu'il y a un animal malade sur 10000.

Peut-on avoir confiance en ce test ? Pour répondre à cette question, on cherche la probabilité que l'animal soit malade sachant que le test est positif et la probabilité que l'animal soit sain sachant que le test est négatif.

Exemple 4.3 *Avec un système complet dénombrable*

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, U_n est une urne contenant une boule blanche et $n-1$ boules noires. On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance une pièce jusqu'à obtenir Pile, on note n le nombre de lancers nécessaires, on tire alors une boule dans l'urne U_n et on regarde sa couleur. Un expérimentateur effectue cette expérience et annonce qu'il a tiré une boule blanche, quelle est la probabilité qu'il l'ait tiré dans l'urne U_1 ?

Definition 4.2 **Indépendance**

1. Deux événements A et B sont dits **indépendants** lorsque $\boxed{P(A\cap B) = P(A).P(B).}$

2. Des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **indépendants deux à deux** lorsque

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i).P(A_j).}$$

3. Des événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** lorsque

$$\boxed{\text{pour toute partie } I \text{ de } [\![1,n]\!],\ P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i).}$$

Remarque 4.2 **Mutuelle indépendance et indépendance deux à deux**

L'indépendance mutuelle d'évènements entraine leur indépendance deux à deux.
La réciproque est fausse.

Remarque 4.3 **Indépendance et complémentaires**

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements mutuellement indépendants alors les événements $B_1, \ldots, B_n$, avec $B_i \in \left\{A_i, \overline{A_i}\right\}$, sont mutuellement indépendants.