PSI **Samedi 13 décembre 2025 - 4 heures - Sujet A**

Sans calculatrice

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice : Fonctions définies comme intégrale à paramètre

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbf{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs et $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Pour I intervalle de $\mathbf{R}$, on note $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour une fonction f continue et bornée sur I, on pose $\|f\|_\infty = \underset{x\in I}{Sup}\,|f(x)|$.
On note, pour $x \in \mathbf{R}_+$ et $m \in \mathbf{R}$

$$T_m(x) = \int_0^\infty t^m e^{-(t^2+x/t)}\, dt$$

On pourra librement utiliser la formule $T_0(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Q1. **a)** Montrer que si $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $m \in \mathbf{R}$, l'intégrale qui définit $T_m(x)$ est convergente.

b) Quel est l'intervalle A des $m \in \mathbf{R}$ tels que l'intégrale qui définit $T_m(0)$ est convergente.

c) Calculer $T_{2k}(0)$ et $T_{2k+1}(0)$ pour $k \in \mathbf{N}$ (en fonction de $k!$ et $(2k)!$).

Q2. **a)** Soit $m \in A$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbf{R}_+$.

b) Soit $m \in \mathbf{R}$. Montrer que T_m est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

c) Montrer que pour $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $m \in \mathbf{R}$,

$$T_m(x) \geq e^{-1} \int_0^1 t^m e^{-x/t}\, dt$$

En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^+} T_m(x)$ lorsque $m \notin A$, en utilisant le changement de variable $w = \dfrac{x}{t}$.

Q3. **a)** Soit $m \in \mathbf{R}$. Montrer que T_m est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer T'_m en fonction de T_{m-1}.

b) Soit $m \in \mathbf{R}$. La fonction T_m est-elle de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$? Quel est le sens de variation de T_m sur $\mathbf{R}_+^*$? La fonction T_m est-elle convexe sur $\mathbf{R}_+^*$?

c) Discuter en fonction de $m \in \mathbf{R}$ la dérivabilité à droite de T_m en 0.

Q4. **a)** Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $m \in \mathbf{R}$. Calculer $T_m(x)$ en fonction de $T_{m-2}(x)$ et $T_{m-3}(x)$. On pourra pour cela considérer la quantité

$$\int_0^{+\infty} t^{m-1}(2t - x/t^2)e^{-(t^2+x/t)}\, dt$$

b) Soit $m \in \mathbf{R}$. Trouver une relation entre $xT'''_m(x), T''_m(x)$ et $T_m(x)$ pour $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Problème : Approximation

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbf{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$ où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I Résultats préliminaires

I.1 Étude d'une série de fonctions

Pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Q5. Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.

Q6. À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

Q7. Déterminer le plus grand réel $R > 0$ tel que $\forall x \in]-R, R[$ la série $\sum a_n x^n$ converge.

Q8. Montrer que

$$\forall x \in \,]-R, R[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{+\infty}$ *et* $\int_0^{+\infty}$ *que l'on justifiera soigneusement.*

I.2 Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

Q9. Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, et x un vecteur de E.

Q10. Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i$.

Q11. Montrer enfin que $\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$.

II Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

Q12. Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

Q13. En déduire que, si $(f, g) \in E_\alpha^2$, alors l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x) g(x) dx$ est convergente.

Q14. En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, +\infty[, \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

Q15. Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n : \,]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, \; x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}.$$

$$\psi_n : \,]0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, \; x \mapsto x^{-\alpha} e^{x} \varphi_n^{(n)}(x).$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

Q16. Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

Q17. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale.
Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$.

Q18. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx \right)^{1/2} \quad \text{pour } f \in E_\alpha.$$

Q19. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que :

$$\varphi_n^{(k)}(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o(e^{-x/2}) \text{ quand } x \to +\infty.$$

Q20. Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) \, \mathrm{d}x$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Q21. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n! \, \Gamma(n + \alpha + 1)$.
On rappelle que la fonction Γ a été définie dans la partie I.

III Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, \; x \mapsto e^{-kx}$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

Q22. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ et calculer sa valeur.

Q23. En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

Q24. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

Q25. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : Si $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \longrightarrow R$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

Q26. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Q27. Soit $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ $(A > 0)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-x^2/2} \right)^2 \mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 26) à $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto h(\sqrt{x}) e^{\frac{x}{2}}$ *et à un* α *bien choisi.*

On peut montrer que le résultat de la question 27) est en réalité valable pour tout $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.

FIN