PSI Samedi 13 décembre 2025 - 4 heures - Sujet A

Sans calculatrice

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : La fonction trigamma

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie I

Soit $x \in \mathbf{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$.

Q1. Démontrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\, dt$ existe et donner sa valeur.

Q2. Etude de la fonction H

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction H est $D_H =]-1, +\infty[$.

2. Montrer que H est monotone sur D_H.

3. Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^\alpha (\ln(t))^2}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur le segment $[0, 1]$.

4. Démontrer que H est de classe C^1 sur D_H. Retrouver alors la monotonie de H.

5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} H(x)$.

6. Démontrer que
$$\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

7. Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

8. Soit $x > -1$.
   (a) Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.
   (b) Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$$
   (c) En déduire que
   $$H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$
   (d) Calculer $H(0)$ et $H(1)$.

Partie II

Q3. Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,
$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

Q4. Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q5. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = H(n)$.
1. Etudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$
2. Démontrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2 - 1}\, dv$$
3. Donner la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Problème 2 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$

Q6. Généralités

Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2$, on note :
$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Justifier que l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente.
2. Montrer que l'application $(.|.) : \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}$ est un produit scalaire.

Q7. Calcul d'un produit scalaire

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\,\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2. Conclure que $(X^k|1) = k!$ pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

Q8. Propriétés de l'application α

1. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

2. Ecrire la matrice de α dans la base $(1, X, \dots, X^n)$.

3. En déduire que α est diagonalisable et que $Sp(\alpha) = \{-k | k \in [\![0,n]\!]\}$.

Q9. Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

1. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]})$?

2. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_k \in \mathbf{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

3. Justifier que P_k est de degré k.

4. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

Q10. Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$.

On fixe un couple $(P,Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2$.

1. Montrer que $(\alpha(P)|Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2. En déduire que $(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q))$.

3. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$.
   On pourra utiliser **Q9-2.** *et* **Q10-2**.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

Q11. Montrer qu'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

Q12. En déduire qu'il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifiant $(*)$.

Q13. Déterminer un polynôme $P \in \mathbf{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$