PSI Un corrigé du D.S. n°04 - Sujet B

Sans calculatrice

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

Problème 1 : Extrait de E3A PSI 2016

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie I

Soit $x \in \mathbf{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, dt$.

Q1. *Il ne faut pas oublier que la propriété d'intégration par parties parle d'abord de nature d'intégrales et seulement ensuite d'une égalité. On peut donc traiter la question 1 avec uniquement cette propriété.*

Soit $s > -1$, les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v : t \mapsto \dfrac{t^{s+1}}{s+1}$ sont de classe C^1 sur $]0,1]$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées $(s+1 > 0)$.
Alors on sait par intégration par parties que les intégrales $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\, dt = \int_0^1 v'(t)u(t)\,\mathrm{d}t$ et $I_s = \displaystyle\int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^s}{s+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(s+1)t^{-s}}\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or I_s est une intégrable de Riemann de référence qui converge puisque $-s < 1$. $\boxed{\text{L'intégrale } J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\, dt \text{ existe.}}$

De plus

$$\begin{aligned}
J_s &= \int_0^1 u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 - \int_0^1 \frac{t^s}{s+1}\mathrm{d}t = -\frac{1}{s+1}\left[\frac{t^{s+1}}{s+1}\right]_0^1 \\
J_s &= -\frac{1}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

Pour toute la suite du problème, on pose $h(x,t) = \dfrac{t^x \ln(t)}{t-1} = e^{x\ln(t)}\dfrac{\ln(t)}{t-1}$.

Q2. Etude de la fonction H

1. $\forall x \in \mathbf{R} \quad t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $]0,1[$ par produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule par sur $]0,1[$. De plus $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\ln t}{t-1} = 1$ (taux d'accroissement), donc

$$h(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} -t^x \ln(t) \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to 1} h(x,t) = 1$$

La fonction $t \mapsto h(x,t)$ étant prolongeable par continuité en 1, l'intégrale définissant $H(x)$ est faussement impropre en 1.

• Si $\underline{x > -1}$ alors d'après le résultat de la question précédente, $t \mapsto t^x \ln(t)$ est intégrable en 0, donc $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable en 0 par comparaison et $\displaystyle\int_0^1 h(x,t)\mathrm{d}t$ converge.

• Si $\underline{x < -1}$ alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $-x > \alpha > 1$ et

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha t^x \ln(t) = \lim_{t\to 0} t^{x+\alpha} \ln(t) = -\infty \text{ donc } \frac{1}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{=} o\left(t^x \ln(t)\right)$$

Puisque $\alpha > 1$ la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ n'est pas intégrable en 0 et par comparaison la fonction positive $t \mapsto h(x,t)$ n'est pas intégrable en 0 alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x,t)\mathrm{d}t$ ne converge pas.

• Si $\underline{x = -1}$ alors

$$\forall a \in]0,1[\quad \int_a^1 h(x,t)\mathrm{d}t = \int_a^1 \frac{\ln(t)}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_a^1 = \frac{-\ln^2 a)}{2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x,t)\mathrm{d}t$ ne converge pas.

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de la fonction } H \text{ est donc } D_H =]-1,+\infty[.}$$

2. Soit $(x,y) \in D_H^2$ tel que $x < y$.
$\forall t \in]0,1[\quad \ln(t) \leq 0$ alors $e^{x\ln t} \geq e^{y\ln t}$ et puisque $\dfrac{\ln t}{t-1} \geq 0$, on a

$$\forall t \in]0,1[\quad h(x,t) \geq h(y,t)$$

Par croissance de l'intégrale, puisque toutes les intégrales convergent,

$$x < y \Longrightarrow H(x) \geq H(y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ est décroissante sur } D_H =]-1,+\infty[.}$$

3. Soit $\alpha > 0$, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^\alpha(\ln(t))^2}{1-t} = t^\alpha \ln(t).\dfrac{\ln t}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$.

De plus par croissances comparées $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha \ln^2(t) = 0$ et on sait que $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{\ln(t)}{1-t} = -1$ (taux d'accroissement), alors
$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0 \qquad \lim_{t\to 1} f(t) = 0$$
La fonction f est continue sur $]0,1[$ et prolongeable par continuité en 0 et en 1.
Elle se prolonge donc en une fonction $\bar{f}$ continue sur le segment $[0,1]$ qui est alors une fonction bornée sur le segment $[0,1]$.

4. • $\forall x > -1, \quad t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ par le résultat de la question 2.1.

• $\forall t \in]0,1[\quad x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = t^x \dfrac{\ln^2 t}{t-1}$.

• $\forall x \in]-1,+\infty[\quad t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$ par produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,1[$.

• *Hypothèse de domination sur tout segment*
Soit $[a,b] \subset]-1,+\infty[$,
$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]0,1[\quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{t^x \ln^2(t)}{1-t} \leq t^a \frac{\ln^2(t)}{1-t}$$

La fonction $\varphi_a : t \mapsto t^a \dfrac{\ln^2(t)}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$ et indépedante de x.

Si $a > 0$ alors par ce qui précède $\exists M > 0 \quad 0 \leq t^a \dfrac{\ln^2(t)}{1-t} \leq M$ et la fonction $t \mapsto M$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1[$ et par comparaison φ_a aussi.

Si $-1 < a \leq 0$ alors il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $-1 < \alpha < a \leq 0$ et par croissances comparées $\varphi_a(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{-\alpha}}\right)$ avec $-\alpha < 1$ donc par comparaison φ_a est intégrable en 0. De plus $\lim\limits_{t\to 1} \varphi_a(t) = 0$ donc φ_a est intégrable sur $]0,1[$.

Finalement $\forall a > -1 \quad \varphi_a$ est intégrable sur $]0,1[$ et par le théorème de dérivation sous le signe $\int$:

la fonction H est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ avec $H'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$

$H'(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln^2(t)}{t-1}\mathrm{d}t \leq 0$ donc on retrouve que H est décroissante sur $]-1,+\infty[$.

5. • $\forall t \in]0,1[\quad \lim\limits_{x\to+\infty} t^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln t} = 0$, donc $\forall t \in]0,1[\quad \lim\limits_{x\to 0+\infty} h(x,t) = 0$.
• $\forall x \geq 0 \quad t \mapsto h(x,t)$ et $t \mapsto 0$ sont continues par morceaux sur $]0,1[$.
• $\forall x \geq 0 \quad \forall t \in]0,1[\quad |h(x,t)| \leq \dfrac{\ln t}{t-1}$.
La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1} = h(0,t)$ est intégrable sur $]0,1[$ par **Q2**.2.

Par théorème de convergence dominée à paramètre continu, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = \int_0^1 \lim\limits_{x\to+\infty} h(x,t)\mathrm{d}t = 0.$

6. Par linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) &= \int_0^1 (t^x - t^{x+1})\frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 -t^x \ln(t)\mathrm{d}t = -J_x\end{aligned}$$

par le résultat de q1 on a

$$\forall x > -1,\ H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

7. H est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ alors H est continue en 0 et donc

$$\lim_{x\to-1} H(x+1) = H(0) \in \mathbf{R}$$

Et l'égalité précédente donne $\lim\limits_{x\to 1}(1+x)^2 H(x) = 1$, donc $\boxed{H(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{(x+1)^2}}$

8. Soit $x > -1$.
   (a) $\frac{1}{(x+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et on sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^2}$ converge ($2 > 1$), alors par comparaison $\boxed{\text{la série à termes positifs } \sum\limits_{k\geq 1} \frac{1}{(x+k)^2} \text{ est convergente.}}$

   (b) <u>1ère méthode : par télesopage</u>
   Soit $n \in \mathbf{N}^*$, par le résultat de la question 2.6, on sait que

$$\forall a > -1 \quad H(a) - H(a+1) = \frac{1}{(a+1)^2}$$

alors $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad H(x+k-1) - H(x+k) = \frac{1}{(x+k)^2}$ et par somme télescopique

$$H(x) - H(x+n) = \sum_{k=1}^{n} (H(x+k-1) - H(x+k)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Donc $\boxed{H(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)}$

2nde méthode : par récurrence

• Par le résultat de **Q2**.6, on sait que $H(x) = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+1)$.

• Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.

Par le résultat de **Q2**.6, on sait que $H(x+n) - H(x+n+1) = \frac{1}{x+n+1}$, donc

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n+1) + \frac{1}{(x+n+1)^2} \\ H(x) &= = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n+1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Et on a obtenu par récurrence } \forall n \in \mathbf{N}^* \quad H(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)}$$

(c) Puisque $\lim_{n \to +\infty} H(x+n) = 0$ (question 2.5), par passage à la limite sur l'égalité précédente (la série étant convergente), on obtient $\boxed{H(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2}}$

(d) $\boxed{\text{D'après ce qui précède } H(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } H(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.}$

Partie II

Q3. Pour tout $x > -1$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ donc pour tout entier naturel k non nul, $\forall t \in [k, k+1]$ $\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \frac{1}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}$ et par intégration sur le segment $[k, k+1]$, on obtient

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{(x+t)^2} \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

Q4. La fonction $t \mapsto \frac{1}{(x+t)^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ puisqu'elle est continue avec $\frac{1}{(x+t)^2} \underset{t \longrightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$.

On sait aussi que $H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$, alors par somme pour $k \in [\![1, N]\!]$ et passage à la limite lorsque N tend vers l'infini sur l'encadrement obtenu à la question **Q3** on obtient :

$$H(x+1) \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2}\mathrm{d}t \leq H(x)$$

Or $H(x+1) = H(x) - \dfrac{1}{(x+1)^2}$ donc

$$H(x) - \frac{1}{(x+1)^2} \leq \left[-\frac{1}{x+t}\right]_1^{+\infty} \leq H(x)$$

Donc $\dfrac{1}{x+1} \leq H(x) \leq \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et par théorème d'encadrement $\lim\limits_{x\to -1}(x+1)H(x) = 1$.

$$\boxed{H(x) \underset{x\to -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$$

Q5. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = H(n)$.

1. D'après ce qui précède $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 0} u_n \text{ diverge.}}$

   On sait que la fonction H est décroissante avec $\lim\limits_{+\infty} H = 0$ donc la suite (u_n) est décroissante et de limite nulle.

   Par le critère spécial des séries alternées $\boxed{\text{la série } \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n u_n \text{ est convergente.}}$

2. Puisque $\sum(-1)^n u_n$ converge on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n H(n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-t)^n \ln t}{t-1}\mathrm{d}t$$

   Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{(-t)^n \ln t}{t-1}$.
   $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est intégrable sur $]0,1[$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$, mais la série $\sum\limits_{n\geq 0}\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\mathrm{d}t$ ne converge pas puisque $\sum u_n$ diverge.
   On ne peut pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme sur l'intervalle $]0,1[$.

   Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \frac{\ln t}{t-1} \times \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$.

   • $\forall n \in \mathbf{N} \quad S_n$ est continue sur $]0,1[$ par somme de fonctions continues.

   • La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $S : t \mapsto \dfrac{lnt}{(t-1)(1+t)}$ qui est une fonction continue sur $]0,1[$.

• *Hypothèse de domination*
Par inégalité triangulaire

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in]0,1[\quad |S_n(t)| \leq \frac{\ln t}{(t-1)} \times \frac{|1| + |(-t)^{n+1}|}{t+1} \leq \frac{2\ln t}{(t-1)(1+t)}$$

La fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{2\ln t}{(t-1)(1+t)}$ est continue sur $]0,1[$ avec $\lim\limits_{t\to 1} \varphi(t) = 1$ et $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} -2\ln(t)$. La fonction ln étant intégrable en 1, φ l'est aussi.
Finalement φ est intégrable sur $]0,1[$ et vérifie $\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in]0,1[|S_n(t)| \leq \varphi(t)$.

Alors théorème de convergence dominée les fonctions S_n et S sont intégrables sur $]0,1[$ avec

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} S_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 S(t)\mathrm{d}t$$

Ce qui donne puisque $\displaystyle\int_0^1 S_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t$

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\ln t}{(t-1)(1+t)}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{On a bien } \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n = \int_0^1 \frac{\ln(v)}{v^2-1}\, dv}$$

3. On effectue le changement de variable $v = \sqrt{t} = \varphi(t)$ sur l'intégrale convergente $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln v}{v^2-1}\mathrm{d}v$ puisque la fonction φ est une bijection croissante de classe C^1 de $]0,1[$ sur $]0,1[$:

$$\int_0^1 \frac{\ln v}{v^2-1}\mathrm{d}v = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{\ln(\sqrt{t})}{t-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{1/2}\frac{\ln t}{t-1}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \int_0^1 \frac{\ln v}{v^2-1}\mathrm{d}v = H\left(\frac{1}{2}\right).}$$

Problème 2 : Extrait de CCINP PC 2019

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$.

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbf{R}_n[X]$

Q6. Généralités

Pour tout couple $(P,Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2$, on note :

$$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit P et Q deux éléments de $\mathbf{R}[X]$, alors il existe $r \in \mathbf{N}$ et des réels $a_0, \dots, a_r$ tels que $PQ = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

   La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est donc continue sur $[0, +\infty[$.

   Par croissances comparées on sait que $\forall a \in \mathbf{R} \quad \lim\limits_{t \to +\infty} t^a e^{-t} = 0$ alors

   $$\forall k \in \mathbf{N} \quad t^k e^{-t} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

   On en déduit, par combinaison linéaire, que $P(t)Q(t)e^{-t} = \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

   Or d'après le résultat sur les intégrales de Riemann on sait que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ $(2 > 1)$, et par comparaison la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est aussi intégrable en $+\infty$ et finalement est intégrable sur $[0, +\infty[$ et donc

   $$\boxed{\text{l'intégrale définissant } (P|Q) \text{ est convergente.}}$$

2. • D'après le résultat de la question précédente, l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}$ est bien définie sur $\mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]$ et est à valeurs dans $\mathbf{R}$.

   • Il est clair que $(P|Q) = (Q|P)$ (commutativité du produit des polynômes).

   • Par distributivité du produit sur l'addition des polynômes, puis par linéarité de l'intégrale, puisque toutes les intégrales sont convergentes, on obtient facilement

   $$\forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall (P, Q, R) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \quad (\alpha P + Q|R) = \alpha(P|R) + (Q|R)$$

   L'application $(.|.)$ est donc linéaire à gauche et puisqu'elle est symétrique, elle est finalement bilinéaire symétrique.

   • Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, l'application $t \mapsto e^{-t}P^2(t)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et intégrable sur cet intervalle, on en déduit immédiatement que :

   $$(P|P) = \int_0^{+\infty} e^{-t}P^2(t)\mathrm{d}t \geq 0 \quad \text{et} \quad (P|P) = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbf{R}^+ \quad e^{-t}P^2(t) = 0$$

   La fonction exp ne s'annule pas sur $\mathbf{R}^+$, donc

   $$(P|P) = 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbf{R}^+ \quad P^2(t) = 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbf{R}^+ \quad P(t) = 0$$

   On en déduit que $(P|P) = 0 \Longrightarrow P$ a une infinité de racines distinctes $\Longrightarrow P = 0$, donc

   $$(P|P) \geq 0 \quad \text{et} \quad (P|P) = 0 \Longrightarrow P = 0$$

   $$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a ainsi montré que l'application } (.|.) \text{ est une forme bilinéaire symétrique} \\ \text{définie-positive sur } \mathbf{R}[X]\text{, c'est donc un produit scalaire sur } \mathbf{R}[X].\end{array}}$$

Q7. Calcul d'un produit scalaire

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, notons $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$. Cette intégrale existe d'après le résultat de la question 6.1.

   Les fonctions $u : t \mapsto t^k$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ avec, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, alors par intégration par parties puisque l'intégrale $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ converge et :

   $$J_k = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = 0 + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t = kJ_{k-1}$$

   On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$

2. Par définition $(X^k|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t.$

   On a : $(X^0|1) = (1|1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!.$
   Supposons que pour k fixé dans $\mathbf{N}^*$, $(X^{k-1}|1) = (k-1)!$.
   Par le résultat de la question précédente, on obtient $(X^k|1) = k(X^{k-1}|1) = k.(k-1)! = k!$.

   On a montré par récurrence que $\forall k \in \mathbf{N} \quad (X^k|1) = k!$

Partie II - Construction d'une base orthogonale

On considère l'application α définie sur $\mathbf{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1-X)P'.$$

Q8. Propriétés de l'application α

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, si $P \in \mathbf{R}_n[X]$ alors $deg(P) \leq n$ donc $deg(P') \leq n-1$ et $deg(P'') \leq n-2$.
   On sait que $deg(XP'') = deg(X) + deg(P'')$ et $deg((1-X)P') = deg(1-X) + deg(P')$ donc $deg(XP'') \leq n-1 < n$ et $deg((1-X)P') \leq n$.
   Par somme de deux polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$, on obtient $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P' \in \mathbf{R}_n[X]$.
   α est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$.

   Par linéarité de la dérivation, on montre que :

   $$\forall \beta \in \mathbf{R} \quad \forall (P,Q) \in \mathbf{R}_n[X] \times \mathbf{R}_n[X] \quad \alpha(\beta P + Q) = \beta.\alpha(P) + \alpha(Q)$$

   L'application α est donc un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.

2. $\alpha(1) = 0$, $\alpha(X) = 1 - X$ et pour $k \in [\![2, n]\!]$

   $$\alpha(X^k) = X.\left(k(k-1)X^{k-2}\right) + (1-X)\left(kX^{k-1}\right) = k(k-1)X^{k-1} + kX^{k-1} - kX^k = k^2X^{k-1} - kX^k$$

On en déduit que la matrice de α dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

3. La matrice M est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $0, -1, \dots, -n$ alors on sait que le polynôme caractéristique de M, qui est celui de α, est $\prod_{k=0}^{n}(X+k)$, et ses racines sont les valeurs propres de α.

   Ce polynôme est scindé à racines simples et annulateur de α (théorème de Cayley-Hamilton), on en déduit que

   $\boxed{\alpha \text{ est diagonalisable et } Sp(\alpha) = \{-k, \quad k \in [\![0, n]\!]\}.}$

Q9. Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

1. $\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]})$ est le sous-espace propre de α associé à la valerur propre $(-k)$.

   On a vu que le polynôme caractéristique de α est scindé à racines simples donc chaque valeur propre est de multiplicité $m = 1$ or on sait que $1 \leq dim\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) \leq m$ donc $\boxed{dim\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) = 1.}$

2. *Existence :*
   Puisque $\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]})$ est de dimension 1, on sait qu'il existe $Q_k \in \mathbf{R}_n[X]$ non nul tel que $\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) = Vect(Q_k)$.
   Le polynôme Q_k divisé par son coefficient dominant est un polynôme P_k de coefficient dominant égal à 1 qui est dans $\mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]})$, alors $\alpha(P_k) = -kP_k$.

   Unicité :
   Supposons que R soit un polynôme qui vérifie $\alpha(R) = -kR$ avec R de coefficient dominant égal à 1.
   On aura $R \in \mathrm{Ker}\,(\alpha + k\,\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) = Vect(Q_k) = Vect(P_k)$, donc il existe $\beta \in \mathbf{R} \quad R = \beta P_k$ et par égalité des coefficients dominants on obtient $\beta = 1$ et donc $R = P_k$.

   $\boxed{\text{On a ainsi montré qu'il existe un unique polynôme } P_k \in \mathbf{R}_n[X] \text{, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant } \alpha(P_k) = -kP_k..}$

3. • On a vu en **Q8**.2 que $\alpha(1) = 0 = -0 \times 1$, or 1 est un polynôme unitaire, par unicité de P_0 on a $P_0 = 1$ et P_0 est donc un polynôme de degré 0.

• Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Puisque P_k est un vecteur propre de α associé à $(-k)$ avec $k \neq 0$, $P_k \notin Vect(P_0) = \mathrm{Ker}(\alpha)$, donc P_k n'est pas de degré 0.
Notons d le degré de P_k, puisque P_k est de coefficient dominant égal à 1, on sait que $d \geq 1$ et P_k' est de degré $d-1$ et de coefficient dominant égal à d et P_k'' est de degré au maximum $d-2$.

Par définition de P_k, on a :

$$\alpha(P_k) = XP_k'' + (1-X)P_k' = -XP_k' + (P_k' + XP_k'') = -kP_k$$

Deux polynômes sont égaux **ssi** ils ont même degré et mêmes coefficients.
$-XP_k' + (P_k' + XP_k'')$ est de degré d et de coefficient dominant égal à $(-d)$ (donné par $-XP_k'$ uniquement) et $-kP_k$ est de degré d et de coefficient dominant égal à $(-k)$ donc $d = k$.

$$\boxed{\text{On a montré que } P_k \text{ est de degré } k \text{ pour tout } k \in [\![0, n]\!].}$$

4. On a vu que $\underline{P_0 = 1}$.

   On sait que l'on peut écrire : $P_1 = X + a$ avec $a \in \mathbf{R}$, alors $P_1' = 1$ et $P_1'' = 0$, donc

$$\alpha(P_1) = -P_1 \iff 1 - X = -(X+a) = -X - a$$

   donc $\underline{P_1 = X - 1}$.

   Prenons $R = X^2 - 4X + 2$.
   R est de coefficient dominant égal à 1 et

$$\begin{aligned}
\alpha(R) &= 2X + (1-X)(2X-4) \\
&= 2X + 2X - 4 - 2X^2 + 4X \\
&= -2X^2 + 8X - 4 \\
&= -2(X^2 - 4X + 2) \\
\alpha(R) &= -2R
\end{aligned}$$

   Par unicité du polynôme P_2, on sait que $\underline{P_2 = R = X^2 - 4X + 2}$.

Q10. Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$.

On fixe un couple $(P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]^2$.

1. Par **Q6**.1, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, effectuons une intégration par parties sur cette intégrale :

Les fonctions $u : t \mapsto tP'(t)e^{-t}$ et $v : t \mapsto Q(t)$ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$ et d'après ce qui a été vu en **Q6**.1, $u(t)v(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.
Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ converge, on sait que $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

Or par dérivation d'un produit avec $u(t) = (tP'(t))\,.e^{-t}$, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}^+ \quad u'(t) = (P'(t) + tP''(t))e^{-t} + (tP'(t))(-e^{-t}) = e^{-t}\left((1-t)P'(t) + tP''(t)\right)$$

On a $u(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ donc

$$\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = 0 - 0 - \int_0^{+\infty}\left((1-t)P'(t) + tP''(t)\right)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -(\alpha(P)|Q)$$

$$\boxed{\text{Ce qui donne bien } (\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t.}$$

2. D'après l'égalité précédente, on a :

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}\mathrm{d}t = (\alpha(Q)|P)$$

et par symétrie dun produit scalaire : $\boxed{(\alpha(P)|Q) = (P|\alpha(Q)).}$

3. D'après ce qui précède et par définition des polynômes $P_0, \ldots, P_n$ on a :
$\forall (k,\ell) \in [\![0,n]\!]^2$

$$-k(P_k|P_\ell) = (\alpha(P_k)|P_\ell) = (P_k|\alpha(P_\ell)) = -\ell(P_k|P_\ell)$$

On en déduit que si $k \neq \ell$ alors $(P_k|P_\ell) = 0$.
La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est alors une famille orthogonale de $\mathbf{R}_n[X]$ ne contenant pas le polynôme nul, c'est donc une famille libre de $n+1$ éléments de $\mathbf{R}_n[X]$, or $dim\mathbf{R}_n[X] = n+1$, c'est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

$$\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est donc une base orthogonale de } \mathbf{R}_n[X].}$$

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme P_n admet n racines réelles **distinctes** que l'on note $x_1, \ldots, x_n$.
On souhaite montrer qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que :

$$\forall P \in \mathbf{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \qquad (*)$$

Q11. On remarque que $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = (P|1)$.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$.

• Si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifie $(*)$, alors en prenant en particulier les polynômes $1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}$ et en utilisant $(X^k|1) = k!$, on obtient directement le système

$$\begin{cases} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \ldots & + & \lambda_n & = & 0! \\ \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \ldots & + & \lambda_n x_n & = & 1! \\ \lambda_1 x_1^2 & + & \lambda_2 x_2^2 & + & \ldots & + & \lambda_n x_n^2 & = & 2! \\ & & & & & & & \vdots & \\ \lambda_1 x_1^n & + & \lambda_2 x_2^n & + & \ldots & + & \lambda_n x_n^{n-1} & = & (n-1)! \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

• Réciproquement, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifit l'égalité matricielle précédente. On aura, d'après les calculs précédents :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad (X^k|1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k$$

Soit $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, il existe des réels $a_0, \ldots, a_{n-1}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et par linéarité du produit scalaire

$$(P|1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k|1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_k \lambda_i x_i^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifie donc $(*)$.

Par double implication on a montré :

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ vérifie $(*)$ si et seulement si : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$

Q12. D'après ce qui précède, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vérifie $(*)$ **ssi** $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vérifie le système précédent.

La matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est une matrice de Vandermonde d'ordre n, or les réels $x_1, \ldots, x_n$ sont distincts deux à deux, on sait alors que cette matrice est inversible car son déterminant, égal à $\displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$, est non nul.

Le système précédent admet donc une solution et une seule $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ avec
$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} 0! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe un unique } n\text{-uplet } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n \text{ vérifiant} \\ \forall P \in \mathbf{R}_{n-1}[X], \quad \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i). \end{array}}$$

Q13. Prenons le polynôme $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)^2$, alors P est de degré $2n$ et vérifie :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) = 0$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = (Q|Q)$ avec $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$.

Q n'est pas le polynôme nul donc $(Q|Q) \neq 0$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t \neq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i)$ pour ce polynôme P de $R_{2n}[X]$.