PSI **Un corrigé du D.S. n°04 - Sujet A**

Le sujet est composé d'un exercice et d'un problème indépendants.

Exercice : Extrait de X-Cachan PSI 2013

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbf{R}_-^*$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs et $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$.

Pour I intervalle de $\mathbf{R}$, on note $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$. Pour une fonction f continue et bornée sur I, on pose $\|f\|_\infty = \underset{x\in I}{Sup}\,|f(x)|$.
On note, pour $x \in \mathbf{R}_+$ et $m \in \mathbf{R}$

$$T_m(x) = \int_0^\infty t^m e^{-(t^2+x/t)}\, dt$$

On pourra librement utiliser la formule $T_0(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour tout l'exercice, pour $m \in \mathbf{R}$, on note f_m la fonction définie sur $\mathbf{R}\times]0,+\infty[$ par

$$f_m(x,t) = t^m \exp\left(-t^2 - \frac{x}{t}\right) = e^{m\ln t} \times e^{-t^2} \times \exp\left(-\frac{x}{t}\right)$$

Q1. **a)** Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $m \in \mathbf{R}$, $t \mapsto f_m(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ par composée et produit. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \exp\left(-\frac{x}{t}\right) = e^0 = 1$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} e^{-t^2} = e^0 = 1$ donc

$$f_m(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^m e^{-x/t} \qquad f_m(x,t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^m e^{-t^2}$$

• $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} t^m e^{-x/t} = \lim_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{-m} \exp\left(-\frac{x}{t}\right)\right] = 0$ par croissances comparées pour $m < 0$ et par produit de limites pour $m \geq 0$.
Donc $\forall m \in \mathbf{R}\quad t \mapsto f_m(x,t)$ est prolongeable par continuité en 0 et l'intégrale $T_m(x)$ est faussement impropre en 0.

• $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f_m(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{m+2}e^{-t^2} = 0$ par croissances comparées si $m \geq -2$ et par produit de limites si $m < -2$. Par conséquent $\forall m \in \mathbf{R}\quad \forall x > 0\quad f_m(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
D'après les intégrales de Riemann on sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ $(2 > 1)$ donc $t \mapsto f_m(x,t)$ est intégrable en $+\infty$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $m \in \mathbf{R}$, $t \mapsto f_m(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc

$$\boxed{\forall x > 0\quad \forall m \in \mathbf{R}\quad T_m(x) \text{ est convergente.}}$$

b) Par définition $T_m(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^m e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto f_m(0,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ avec

$$f_m(0,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^m$$

• D'après les intégrales de Riemann, la fonction $t \mapsto t^m = \dfrac{1}{t^{-m}}$ est intégrable en 0 si, et seulement si, $-m < 1$, donc par comparaison $t \mapsto f_m(0,t)$ est intégrable en 0 si et seulement si $m > -1$.

• On a déjà vu en **Q1**a) que $\forall m \in \mathbf{R} \quad t^m e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ avec $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ qui est intégrable en $+\infty$, donc $t \mapsto f_m(0,t)$ est intégrable en $+\infty$.

On a ainsi obtenu que la fonction $t \mapsto f_m(0,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si $m > -1$, et la fonction étant positif cela revient à la convergence de l'intégrale $T_m(0)$.

$$\boxed{T_m(0) \text{ converge si et seulement si } m \in A =]-1,+\infty[.}$$

c) D'après ce qui précède $\forall k \in \mathbf{N} \quad T_{2k}(0)$ et $T_{2k+1}(0)$ convergent.

• D'après l'énoncé $T_0(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$, $T_{2k}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2k-1} \times \left(te^{-t^2}\right) \mathrm{d}t$.

Les fonctions $u : t \mapsto t^{2k-1}$ et $v : t \mapsto -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ ($2k-1 \geq 1$) avec par croissances comparées $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$. Puisque l'intégrale $T_{2k}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ converge, par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
T_{2k}(0) &= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&\quad \text{or } u(0) = 0 \quad (2k-1 \geq 1) \\
T_{2k}(0) &= 0 + \frac{2k-1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2k-2}e^{-t^2}\mathrm{d}t \\
T_{2k}(0) &= \frac{2k-1}{2} T_{2(k-1)}(0)
\end{aligned}$$

On pouvait aussi faire l'intégration par partie avec $u(t) = \dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$ *et* $v(t) = -e^{-t^2}$ *et alors* $T_{2k}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$*, cela donnait la relation précédente entre* $T_{2k}(0)$ *et* $T_{2k+2}(0)$*.*

Alors pour $k \geq 2$, $T_{2k}(0) = \dfrac{2k-1)}{2} \times \dfrac{2k-3}{2} T_{2(k-2)}(0)$.
On conjecture

$$T_{2k}(0) = \frac{(2k-1)\times(2k-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2^k} T_0(0) = \frac{(2k)!}{2^k(2k\times(2k-2)\times\cdots\times 2)} T_0(0) = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} T_0(0$$

L'égalité $T_{2k}(0) = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}k!}T_0(0)$ est vraie pour $k = 0$ puisque $0! = 1 = 2^0$.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $T_{2(k-1)}(0) = \dfrac{(2(k-1))!}{2^{2(k-1)}(k-1)!}T_0(0)$.
D'après l'égalité $T_{2k}(0) = \dfrac{2k-1}{2}T_{2(k-1)}(0)$, on obtient :

$$T_{2k}(0) = \frac{(2k-1)\times(2k-2)!}{2\times 2^{2k-2}(k-1)!}T_0(0) = \frac{(2k)!}{2k(2^{2k-1}(k-1)!}T_0(0) = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!}T_0(0)$$

On a donc obtenu par récurrence : $\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \quad T_{2k}(0) = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}k!}T_0(0) = \dfrac{(2k)!\sqrt{\pi}}{2^{2k+1}k!}.}$

• De même $T_{2k+1}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2k}(-te^{-t^2})\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ avec $u(t) = t^{2k}$ et $v(t) = -\dfrac{e^{-t^2}}{2}$. On obtient alors avec les mêmes arguments que précédemment $T_{2k+1}(0) = kT_{2k-1}(0)$, ce qui va donner la conjecture $T_{2k+1}(0) = k!T_1(0)$, qui se prouve facilement par récurrence *(lorsque l'on a fait correctement la récurrence précédente, on peut ne pas faire celle-ci.*
$T_1(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t = [v(t)]_0^{+\infty} = -v(0) = \frac{1}{2}$.

Ce qui donne finalement $\boxed{\forall k \in \mathbf{N} \quad T_{2k+1}(0) = \dfrac{k!}{2}}$

On pouvait faire l'intégration par partie sur $T_n(0)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, puis prendre ensuite les cas particulier $n = 2k$ et $n = 2k+1$.

Q2. **a)** Soit $m \in A$, avec $A =]-1, +\infty[$.

• $\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad t \mapsto f_m(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ car continue d'après ce qui a été fait en **Q1**a).

• $\forall t > 0 \quad x \mapsto f_m(x,t) = t^m e^{-t^2} \times \exp\left(-\dfrac{x}{t}\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$ par composée d'une fonction affine et de la fonction exponentielle.

• $\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad \forall t \in \mathbf{R}^{+*} \quad |f_m(x,t)| = t^m e^{-t^2} \times \exp\left(-\dfrac{x}{t}\right)$ avec $\dfrac{-x}{t} \leq 0$, donc

$$\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad \forall t \in]0, +\infty[\quad |f_m(x,t)| \leq t^m e^{-t^2}$$

On a vu en **Q1**b) que pour $m \in A$ la fonction positive, indépendante de x, $t \mapsto f_m(0,t) = t^m e^{-t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Alors par théorème de continuité pour une intégrale à paramètre, on sait que la fonction

$$\boxed{T_m : x \mapsto \int_0^{+\infty} f_m(x,t)\mathrm{d}t \text{ est continue sur } \mathbf{R}^+ \text{ pour } m \in A.}$$

b) Soit $m \in \mathbf{R}$. Comme précédemment on a toujours $\forall x \in \mathbf{R}^{+*} \quad t \mapsto f_m(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et $\forall t \in \mathbf{R}^{+*} \quad x \mapsto f_m(x,t)$ est continue sur $)0,+\infty[$.

• Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in]0,+\infty[\quad -\dfrac{x}{t} \leq -\dfrac{a}{t}$, alors par croissance de la fonction exponentielle avec $t^m e^{-t^2} \geq 0$, on obtient :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t > 0 \quad |f_m(x,t)| \leq f_m(a,t)$$

La fonction positive, indépendante de x, $t \mapsto f_m(a,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après **Q1**a) puisque $a > 0$.

Par théorème de continuité pour une intégrale à paramètre avec domination sur tout segment, on obtient $\boxed{\text{la continuité sur }]0,+\infty[\text{ de la fonction } T_m \text{ pour tout réel } m.}$

c) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $m \in \mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto f_m(x,t)$ est intégrable et positive sur $]0,+\infty[$ alors par relation de Chasles et positivité de l'intégrale on a :

$$T_m(x) \geq \int_0^1 f_m(x,t)\mathrm{d}t$$

De plus $\forall t \in]0,1] \quad e^{-t^2} \geq e^{-1}$ donc $f_m(x,t) \geq e^{-1}t^m e^{-x/t}$ et par croissance de l'intégrale (convergente)

$$T_m(x) \geq e^{-1}\int_0^{+\infty} t^m e^{-x/t}\mathrm{d}t$$

Sur la dernière intégrale on effectue le changement de variable $t = \dfrac{x}{w} = \varphi(w)$ sachant que φ est une bijection strictement décroissante de $[x,+\infty[$ sur $]0,1]$ de classe C^1 avec $\varphi'(w) = \dfrac{-x}{w^2}$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} t^m e^{-x/t}\mathrm{d}t = -\int_x^{+\infty} \varphi'(w)\varphi^m(w)e^{-w}\mathrm{d}w = x^{m+1}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w^{m+2}}\mathrm{d}w$$

donc

$$T_m(x) \geq e^{-1}x^{m+1}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w^{m+2}}\mathrm{d}w$$

On suppose que $m \notin A$ donc $m \leq -1$.

• Si $m < -1$ alors $m+1 < 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{m+1} = +\infty$. De plus $m+2 < 1$ avec $\dfrac{e^{-w}}{w^{m+2}} \underset{w \to 0}{\sim} \dfrac{1}{w^{m+2}}$ donc $w \mapsto \dfrac{e^{-u}}{w^{m+2}}$ est continue, strictement positive et intégrable en 0 ce qui donne $\lim\limits_{x \to 0^+}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w^{m+2}}\mathrm{d}w = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w^{m+2}}\mathrm{d}w \in]0,+\infty[$.

Par produit de limites $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(e^{-1}x^{m+1}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w^{m+2}}\mathrm{d}w\right) = +\infty$ et par comparaison $\lim\limits_{x \to 0^+} T_m(0) = +\infty$.

• Si $m = -1$ alors $T_m(x) \geq e^{-1}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w}\mathrm{d}w$ et la fonction positive $w \mapsto \dfrac{e^{-w}}{w}$ n'est pas intégrable en 0, alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-w}}{w}\mathrm{d}w$ n'a pas de limite finie en 0 mais comme elle est croissante on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-w}}{w}\mathrm{d}w = +\infty$ et par comparaison $\lim\limits_{x\to 0^+} T_m(0) = +\infty$.

$$\boxed{\forall m \notin A \quad \lim_{x\to 0^+} T_m(x) = +\infty.}$$

Q3. **a)** Soit $m \in \mathbf{R}$.

• $\forall x \in \mathbf{R}^{+*}$ on a vu en **Q1**a) que la fonction $t \mapsto f_m(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

• $\forall t > 0, \quad x \mapsto f_m(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ par composée d'une fonction affine et de la fonction exponentielle avec $\forall x > 0 \quad \forall t > 0 \quad \frac{\partial f_m}{\partial x}(x,t) = t^m e^{-t^2}\left(-\frac{e^{-x/t}}{t}\right) = -f_{m-1}(x,t)$.

• $\forall x > 0 \quad t \mapsto \frac{\partial f_m}{\partial x}(x,t)$ est alors continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ par produit et composée de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

• Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$.

$$\forall x \in [a,b] \forall t > 0 \quad \left|\frac{\partial f_m}{\partial x}(x,t)\right| = t^{m-1}e^{-t^2}e^{-x/t} \leq t^{m-1}e^{-t^2}e^{-a/t}$$

La fonction, positive et indépendante de x, $t \mapsto f_{m-1}(a,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après le résultat de la question **Q1**a).

Alors par le théorème de dérivation sous le signe $\int$ avec domination sur tout segment, la fonction $T_m : x \mapsto \int_0^{+\infty} f_m(x,t)\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec par la formule de Leibniz $T_m'(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\partial f_m}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} f_{m-1}(x,t)\mathrm{d}t$.

$\boxed{\text{La fonction } T_m \text{ est donc dérivable sur }]0,+\infty[\text{ avec } T_m' = -T_{m-1}.}$

b) Soit $m \in \mathbf{R}$. D'après le résultat de la question précédente on peut conjecturer que $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \forall m \in \mathbf{R} \quad T_m$ est de classe C^k sur $]0,+\infty[$ avec $T_m^{(k)} = (-1)^k T_{m-k}$.

• Pour $k = 1$ on a montré en **Q3**a) que $\forall m \in \mathbf{R} \quad T_m$ est de classe C^1 avec $T_m' = -T_{m-1}$.

• Soit $k \geq 2$ tel que $\forall i \in [\![1, k-1]\!] \quad \forall m \in \mathbf{R} \quad T_m$ est de classe C^i sur $]0,+\infty[$ avec $T_m^{(i)} = (-1)^i T_{m-i}$, alors en particulier $T_{m-(k-1)}$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, ce qui donne $T_m^{(k-1)}$ est de classe C^1 donc T_m est de classe C^k sur $]0,+\infty[$ avec
$T_m^{(k)} = \left(T_m^{(k-1)}\right)' = (-1)^{k-1}T_{m-k+1}'$ et par la question **Q3**a) $T_{m-k+1}' = -T_{m-k}$ donc $T_m^{(k)} = (-1)^k T_{m-k}$.

On a montré par récurrence forte que $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \forall m \in \mathbf{R} \quad T_m$ est de classe C^k sur

$]0,+\infty[$ avec $T_m^{(k)} = (-1)^k T_{m-k}$ donc $\boxed{\forall m \in \mathbf{R} \quad T_m \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]0,+\infty[.}$

On aura donc $\forall x \in]0,+\infty[\quad T_m'(x) = -\int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-t^2-x/t} \mathrm{d}t \leq 0$ par intégrale convergente d'une fonction continue positive. T_m est donc décroissante sur $]0,+\infty[$.

On a aussi $\forall x \in]0,+\infty[\quad T_m''(x) = \int_0^{+\infty} t^{m-2} e^{-t^2-x/t} \mathrm{d}t \geq 0$ donc la fonction T_m est convexe sur $]0,+\infty[$.

c) Soit $m \in \mathbf{R}$.

• Si T_m est dérivable en 0 alors T_m est continue en 0 donc par **Q2**c) on doit avoir $m \in A$.

• Si $m \in A$ alors par **Q1**a) T_m est continue sur $[0,+\infty[$ et par **Q3**a) T_m est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $T_m = -T_{m-1}$.

Par **Q1**b) si $m-1 \in A$ alors $\lim_{x\to 0^+} T_{m-1}(x) = T_{m-1}(0) = -\lim\limits_{x\to 0^+} T_m'(x)$. T_m est alors de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ par théorème de la limite de la dérivée avec $T_m'(0) = -T_{m-1}(0)$.

Par **Q2**c) si $m-1 \notin A$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} T_{m-1}(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} T_m'(x) = -\infty$, la fonction T_m n'est pas dérivable en 0 par le théorème de la limite de la dérivée.

Je rappelle que le théorème de la limite de la dérivée utilise le théorème des accroissements finis : $\forall x > 0 \quad \exists c_x \in]0,x[\quad \dfrac{T_m(x) - T_m(0)}{x-0} = T_m'(c_x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0^+} c_x = 0$.

$\boxed{\text{On en déduit donc que } T_m \text{ est dérivable en 0 si et seulement si } m > 0.}$

Q4. a) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $m \in \mathbf{R}$.

Par **Q1**a) on sait que $T_m(x)$, $T_{m-2}(x)$ et $T_{m-3}(x)$ converge alors par linéarité

$$2T_m(x) - xT_{m-3}(x) = \int_0^{+\infty} t^{m-1}(2t - x/t^2) e^{-(t^2+x/t)}\, dt$$

Les fonctions $u : t \mapsto t^{m-1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t^2-x/t}$ sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $u'(t) = (m-1)t^{m-2}$ et $v'(t) = (2t - x/t^2)e^{-(t^2+x/t)}$ donc

$$2T_m(x) - xT_{m-3}(x) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

Comme vu en **Q1**a), on obtient par croissances comparées ou produit de limites suivant les valeurs de m : $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, alors par intégration par parties

$$2T_m(x) - xT_{m-3}(x) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (m-1)t^{m-2}e^{-t^2-x/t}\mathrm{d}t$$

$\boxed{\text{On a donc } \forall x \in \mathbf{R}^{+*} \quad 2T_m(x) - xT_{m-3}(x) = (m-1)T_{m-2}(x)}$

b) Soit $m \in \mathbf{R}$, par les résultats des questions **Q3**a)b) et **Q4**a) on obtient immédiatement

$$\forall x \in \mathbf{R}^{+*} \quad 2T_m(x) + xT_m'''(x) = (m-1)T_m''(x)$$

Problème : Mines-Ponts PC Maths2

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ ou sur $\mathbf{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$ où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I Résultats préliminaires

I.1 Étude d'une série de fonctions

Pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Q5. • Pour tout $x > 0$, la fonction $f_x : t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{(x-1)\ln t} \times e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ avec

$$f_x(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$$

Or $1 - x < 1$ alors d'après les intégrales de Riemann on sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 et par comparaison la fonction f_x est aussi intégrable en 0.

De plus par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$, donc $f_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, et par les intégrales de Riemann on sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ $(2 > 1)$, alors par comparaison f_x est aussi intégrable en $+\infty$.

Finalement $\forall x > 0 \quad f_x$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et donc $\underline{\Gamma(x) \text{ est bien définie}}$.

• $\forall x > 0 \quad t \mapsto f_x(t)$ est continue, strictement positive et intégrable sur $]0, +\infty[$ alors par propriété $\underline{\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f_x(t)\mathrm{d}t > 0}$.

Q6. Soit $x > 0$.
Les fonctions $u : t \mapsto t^x = e^{x\ln(t)}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ avec $\lim\limits_{t\to 0^+} u(t)v(t) = 0$ puisque $x > 0$ et par croissances comparées $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$.

Alors par intégration par parties puisque $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t$ converge $(x+1>0)$ on sait que

$$\Gamma(x+1) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

On a donc $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x>0$.

Remarque : *La fonction Γ joue le rôle de la fonction factorielle sur $\mathbf{R}$.*
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité précédente permet d'obtenir par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(0) = n!$.
Et pour $x \in \mathbf{R}^{+*}$ et $n \in \mathbf{N}$ $(x+n+1)!$ n'existe pas, la factorielle n'étant définie que sur $\mathbf{N}$, mais on obtient, toujours par récurrence, $\forall n \in \mathbf{N} \quad \Gamma(x+n+1) = (x+n)(x+n-1)\dots x\Gamma(x)$, ce qui permet d'écrire $\dfrac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x)} = \prod_{k=0}^{n}(x+k)$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

Q7. Pour $x \in \mathbf{R}^*$ et $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = a_n x^n$, alors $u_n \neq 0$ et avec le résultat de **Q6** et la stricte positivité de la fonction Γ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} \times \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times |x| \\
\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \frac{n+\alpha+1}{n+1}|x|
\end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = |x|$.

Par critère de d'Alembret on sait alors que si $|x|<1$ alors la série $\sum u_n$ converge absolument et si $|x|>1$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On en déduit que le plus grand réel $R>0$ tel que $\forall x \in]-R, R[$ la série $\sum a_n x^n$ converge est

$$R = 1$$

Q8. Soit $x \in]-1,1[$, par le résultat précédent la série $\sum a_n x^n$ converge absolument et par définition de la fonction Γ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+\alpha}x^n}{n!}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(t) = \dfrac{t^{n+\alpha}x^n}{n!}e^{-t}$.

• $\alpha > -1$ donc $n+\alpha+1>0$ et par définition de la fonction Γ sur $]0,+\infty[$, $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

- On sait que $\forall y \in \mathbf{R} \quad \sum \dfrac{y^n}{n!}$ converge avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y$, alors $\forall t > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n(t)$ est convergente avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^\alpha e^{-t} \frac{(xt)^n}{n!} = t^\alpha e^{-t} e^{xt}$.

  On obtient donc que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et S sa somme est la fonction $t \mapsto t^\alpha e^{(x-1)t}$.

- La fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n : t \mapsto t^\alpha e^{(x-1)t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+\alpha}.|x|^n}{n!} e^{-t} \mathrm{d}t = a_n |x|^n = |a_n x^n|$.

  Puisque $|x| < 1$ la série $\sum a_n x^n$ converge absolument (**Q7**), donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n x^n|$ converge, ce qui donne la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\, \mathrm{d}t$.

  Par théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle, on sait que la fonction S est intégrable sur $]0, +\infty[$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} S(t) \mathrm{d}t$$

  ce qui donne ici

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-(1-x)t} \mathrm{d}t$$

  En effectuant le changement de variable affine $u = (1-x)t$ on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-x} \left(\frac{u}{(1-x)} \right)^\alpha e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u} \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}}$$

I.2 Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

Q9. F étant de dimension finie on sait que $E = F \oplus F^\perp$ et par définition la projection orthogonale π_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

C'est-à-dire que π_F est l'application $\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & y \end{array}$ où $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times F^\perp$.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, et x un vecteur de E.

Q10. $\pi_F(x) \in F$ alors il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\pi_F(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Puisque $x - \pi_F(x) \in F^\perp$, on sait que $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \langle x - \pi_F(x), e_k \rangle = 0$, or par bilinéarité du produit scalaire

$$\langle x - \pi_F(x), e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_k \rangle$$

et puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormée il reste

$$\langle x - \pi_F(x), e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \lambda_k$$

On a donc $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_k = \langle x, e_k \rangle$ et $\boxed{\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i}$

Q11. Par théorème de Pythagore puisque $p_F(x) \in F$ et $x - \pi_F(x) \in F^{\perp}$ on a :

$$\|x\|^2 = \|(x - \pi_F(x)) + \pi_F(x)\|^2 = \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|\pi_F(x)\|^2$$

avec par bilinéarité du produit scalaire et $(e_1, \dots, e_n)$ famille orthonormée :

$$\begin{aligned} \|\pi_F(x)\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, . \, \langle x, e_k \rangle \, . \, \langle e_i, e_k \rangle \\ \|\pi_F(x)\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement } \|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.}$$

II Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

Q12. Ppour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $(|a| - |b|)^2 \geq 0$, ce qui donne $|a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \geq 0$ ou encore $\boxed{|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}.}$

Q13. Si $(f, g) \in E_\alpha^2$, alors f et g sont continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f^2(x) \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g^2(x) \mathrm{d}x$ convergent.

Par linéarité l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} \mathrm{d}x$ est convergente et puisque la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} \dfrac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$ est continue et positive, elle est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par produit $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x) g(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles, alors par **Q13**

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad x^\alpha e^{-x} |f(x) g(x)| \leq x^\alpha e^{-x} . \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$$

par comparaison la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et donc

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx \text{ est convergente.}}$$

Q14. • Par définition $E_\alpha \subset C([0,+\infty[,\mathbf{R})$.

• La fonction nulle f étant continue et intégrable sur $[0,+\infty[$, l'intégratle $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-t} f^2(t)\mathrm{d}t$ converge et donc $f \in E_\alpha$.

• Soit $(f,g) \in E\alpha^2$ et $\lambda \in R$,

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad (\lambda f + g)(x) = \lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x)$$

Par définition de $E\alpha$ et par **Q13** les intégrales $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f^2(x)\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ et $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g^2(x)\mathrm{d}x$ convergent alors par linéarité l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(\lambda f(x) + g(x))^2\mathrm{d}x$ converge et donc $\lambda f + g \in E_\alpha$.

$$\boxed{\text{Par caractérisation } E_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel } \mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbf{R}).}$$

Q15. Toute fonction polynômiale est combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto x^k$ avec $k \in \mathbf{N}$.

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, la fonction $x \mapsto x^k$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $2k+\alpha+1 > 0$ alors par **Q5** $\Gamma(2k+\alpha+1) = \int_0^{+\infty} x^{2k+\alpha} e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(x^k)^2\mathrm{d}x$ converge, ce qui donne : $\forall k \in \mathbf{N} \quad x \mapsto x^k$ est dans E_α.

E_α étant un sous-espace vectoriel, toute combinaison linéaire des fonctions $x \mapsto x^k$ avec $k \in \mathbf{N}$ est dans E_α, donc

$$\boxed{\text{toute fonction polynomiale est dans } E_\alpha.}$$

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}.$$

$$\psi_n :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x).$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

Q16. Par définition :

• $\forall x \in]0,+\infty[\quad \varphi_0(x) = x^\alpha e^{-x}$ donc $\psi_0(x) = x^{-\alpha} e x \varphi_0^(0)(x) = x^{-\alpha} e^x \varphi_0(x) = 1$.

• $\forall x \in]0,+\infty[\quad \varphi_1(x) = x^{\alpha+1}e^{-x}$ donc

$$\psi_1(x) = x^{-\alpha}e^x\varphi_1'(x) = x^{-\alpha}e^x\left((\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1}e^{-x}\right) = (\alpha+1) - x$$

• $\forall x \in]0,+\infty[\quad \varphi_2(x) = x^{\alpha+2}e^{-x}$ et $\psi_2(x) = x^{-\alpha}e^x\varphi_2''(x)$

$$\varphi_2'(x) = (\alpha+2)x^{\alpha+1}e^{-x} - x^{\alpha+2}e^{-x}$$

donc

$$\psi_2(x) = x^{-\alpha}e^x\left((\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - (\alpha+2)x^{\alpha+1}e^{-x} - (\alpha+2)x^{\alpha+1}e^{-x} + x^{\alpha+2}e^{-x}\right)$$

Ce qui donne $\underline{\psi_2(x) = x^2 - 2(\alpha+2)x + (\alpha+2)(\alpha+1)}$

Q17. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\forall x \in]0,+\infty[\quad \psi_n(x) = x^{-\alpha}e^{-x}\varphi_n^{(n)}(x)$.

Par la formule de Leibniz, en posant $u(x) = x^{n+\alpha}$ et $v(x) = e^{-x}$, on sait que

$$\varphi_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

Par dérivées successives d'une fonction puissance et de la composée d'une fonction affine et avec la fonction exponentielle, on a :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad u^{(k)}(x) = (n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(n+\alpha-k+1)x^{n+\alpha-k} \qquad v^{(n-k)}(x) = (-1)^{n-k}e^{-x}$$

On en déduit que

$$\varphi_n^{(n)}(x) = (-1)^n x^{n+\alpha}e^{-x} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)x^{n+\alpha-k}e^{-x}$$

Donc $\psi_n(x) = (-1)^n x^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(n+\alpha-i)\right)x^{n-k}$, et
$lk \in [\![1,n]\!] \Longrightarrow n-k \in [\![0,n-1]\!]$, alors

$\boxed{\psi_n \text{ est polynomiale de degré } n \text{ et de coefficient dominant égal à } (-1)^n.}$

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0,+\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0,+\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f,g) \in E_\alpha^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f(x)g(x)dx$.

Q18. • On a vu en **Q13** que pour $(f,g) \in E_\alpha^2$ l'intégrale $\langle f,g\rangle$ converge et puisque f et g sont à valeurs réelles, on a $\langle f,g\rangle \in \mathbf{R}$.

• Par commutativité du produit des réels, on a immédiatement $\langle f,g\rangle = \langle g,f\rangle$. L'application $\langle .,.\rangle$ est donc symétrique.

• Soit $(f,g,h)\in E_\alpha^2$ et $\lambda\in\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\langle \lambda f+g,h\rangle &= \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(\lambda f(x)+g(x))\mathrm{d}x\\ &\quad\text{par linéarité de l'intégrale puisque toutes les intégrales convergent}\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)h(x)\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} g(x)h(x)\mathrm{d}x\\ \langle \lambda f+g,h\rangle &= \lambda\,\langle f,h\rangle+\langle g,h\rangle\end{aligned}$$

L'application $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche, puisqu'elle st symétrique, elle est bilinéaire.

• Soit $f\in E_\alpha$, la fonction $x\mapsto x^\alpha e^{-x}f^2(x)$ est continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ alors par propriété de positivité de l'intégrale on sait que

$$\langle f,f\rangle=\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}f^2(x)\mathrm{d}x\geq 0 \text{ et } \langle f,f\rangle=0\Longrightarrow \forall x\in]0,+\infty[\quad x^\alpha e^{-x}f^2(x)=0$$

$\forall x\in]0,+\infty[\quad x^\alpha e^{-x}\neq 0$ donc

$$\langle f,f\rangle\geq 0 \text{ et } \langle f,f\rangle=0\Longrightarrow \forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)=0$$

Par continuité de f en 0, on a $\forall x>0\quad f(x)=0\Longrightarrow \forall x\geq 0\quad f(x)=0$.

On a donc $\langle f,f\rangle\geq 0$ et $\langle f,f\rangle=0\Longrightarrow f=0_{E\alpha}$.

L'application $\langle .,.\rangle$ est donc une forme bilinéaire symétrique définie-positive sur E_α,

$\boxed{\text{c'est donc un produit scalaire sur } E_\alpha.}$

Dans la suite, on note $\|\cdot\|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par :

$$\|f\|_\alpha=\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}x^\alpha f(x)^2dx\right)^{1/2}\quad \text{pour } f\in E_\alpha.$$

Q19. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On rappelle que $\alpha>-1$.

• $\varphi_n(x)=x^{n+\alpha}e^{-x}=e^{(n+\alpha)\ln(x)}e^{-x}\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ puisque $n+\alpha>n-1\geq 0$.

Et pour tout entier $k\in[\![1,n-1]\!]$, la formule de Leibniz pour les dérivées successives d'un produit de fonctions donne $\forall x>0\quad \varphi_n^{(k)}(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}u^{(i)}(x)v^{(k-i)}(x)$ avec $u(x)=x^\alpha$ et $v(x)=e^{-x}$, ce qui donne (comme vu dans le cas particulier $k=n$ en **Q17**) :

$$\varphi_n^{(k)}(x)=(-1)^k x^{n+\alpha}e^{-x}+\sum_{i=1}^{n}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\left(\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha+j)\right)x^{n+\alpha-k}e^{-x}$$

$\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad n+\alpha-k>n-1-k\geq 0$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{n+\alpha-k}=0$.

Par combinaison linéaire de fonctions de limites nulles, on obtient $\boxed{\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\varphi_n^{(k)}(x)=0}$

• On a aussi $e^{x/2}\varphi_n(x) = x^{n+\alpha}e^{-x/2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Et pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ $\quad e^{x/2}\varphi_n^{(k)}(x) = (-1)^k x^{n+\alpha}e^{-x/2} + \sum_{i=1}^{n}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\left(\prod_{j=0}^{i-1}(n+\alpha+j)\right)x^{n+\alpha-k}e^{-x/2}$, par croissances comparées $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+\alpha-k}e^{-x/2} = 0$, donc par combinaison linéaire de fonctions de limite nulle en $+\infty$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x/2}\varphi_n^{(k)}(x) = 0$ ce qui signifie

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{-x/2}\right)}$$

Q20. Soit m et n deux entiers naturels.

• Par définition $\langle \psi_m, \psi_n\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\psi_m(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \psi_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)\mathrm{d}x$.

Le résultat attendu et la question précédente permettent d'envisager des intégrations par parties successives.

Montrons par récurrence descendante : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\quad \langle \psi_m, \psi_n\rangle = (-1)^{n-k}\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n-k)}(x)\varphi_n^{(k)}(x)\mathrm{d}x$, égalité notée $\mathcal{P}(k)$.

On vient de voir que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$ telle que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. On a donc $\langle \psi_m, \psi_n\rangle = (-1)^{n-k}\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n-k)}(x)\varphi_n^{(k)}(x)\mathrm{d}x$.
Les fonctions définies par $u(x) = \psi_m^{(n-k)}(x)$ et $v(x) = \varphi_n^{(k-1)}(x)$ sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ puisque ψ_m est polynomiale de degré m et φ_n est un produit de fonctions de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

Puisque $k-1 \in [\![0, n-1]\!]$ les résultats de **Q19** donnent par produit de limites

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad \lim_{x\to 0^+} x^i\varphi_n^{(k-1)}(x) = 0$$

et $x^i\varphi_n^{(k)}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^i e^{-x/2}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} x^i e^{-x/2} = 0$, donc par combinaison linéaire de fonctions de limite nulle ($\psi_m^{(n-k)}$ est polynomiale), on a :

$$\lim_{x\to 0^+} u(x)v(x) = \lim_{x\to 0^+} \psi_m^{(n-k)}(x)\varphi_n^{(k)}(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = lim_{x\to+\infty}\psi_m^{(n-k)}(x)\varphi_n^{(k)}(x) = 0$$

$\langle \psi_m, \psi_n\rangle = (-1)^{n-k}\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ converge alors par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \psi_m, \psi_n\rangle &= (-1)^k\left([u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= (-1)^{k+1}\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n-k+1)}(x)\varphi_n^{(k-1)}\mathrm{d}x \\
\langle \psi_m, \psi_n\rangle &= (-1)^{n-(k-1)}\int_0^{+\infty} \psi_m^{(n-(k-1))}(x)\varphi_n^{(k-1)}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On a montré $\mathcal{P}(k)$ est vraie $\Longrightarrow \mathcal{P}(k-1)$ est vraie et $\mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $\quad \mathcal{P}(k)$

est vraie et en particulier pour $k = 0$ on obtient $\boxed{\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x}$

• Soit n et m deux entiers naturels distincts.
Si $m < n$ alors $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0$ puisque ψ_m est polynomiale de degré $m < n$.
Et par symétrie du produit scalaire, si $n < m$ alors $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \langle \psi_n, \psi_m \rangle = (-1)^m \int_0^{+\infty} \psi_n^{(m)}(x)\varphi_m(x)\mathrm{d}x$
0 puisque ψ_n est polynomiale de degré $n < m$.

On a donc $n \neq m \Longrightarrow \langle \psi_m, \psi_n \rangle = 0$ et donc

$\boxed{\text{la famille } (\psi_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est orthogonale pour le produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle.}$

Q21. Soit $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = \langle \psi_n, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_n^{(n)}(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$ (**Q20**).

Par **Q17** ψ_n est polynomiale de degré n et de coefficient dominant égal à $(-1)^n$, donc :

$$\langle \psi_n, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} (-1)^n n! \psi_n(x)\mathrm{d}x = n! \int_0^{+\infty} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = n! \int_0^{+\infty} x^{n+\alpha}e^{-x}\mathrm{d}x$$

$\boxed{\text{Ce qui donne finalement } \|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n+\alpha+1).}$

III Approximation

Cette partie n'a été abordée qu'une ou deux fois, je vous renvoie donc aux corrigés du site https ://prepas.org/index.php ?module=Sujets, si vous souhaitez voir les méthodes qu'il fallait utiliser.

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto e^{-kx}$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0\leq n\leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

Q22. Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n\rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$ et calculer sa valeur.

Q23. En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \longrightarrow 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

Q24. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

Q25. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R},\ t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) & \text{si } t \in]0,1] \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : Si $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0,1] \longrightarrow R$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]$.

Q26. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Q27. Soit $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ $(A > 0)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-x^2/2} \right)^2 \mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question 26) à $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R},\ x \mapsto h(\sqrt{x}) e^{\frac{x}{2}}$ *et à un* α *bien choisi.*

On peut montrer que le résultat de la question 27) est en réalité valable pour tout $h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.

FIN