Traiter au choix un des deux exercices suivants

Exercice 1 : Lien entre la fonction β et la fonction Γ

On rappelle que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ est définie et strictement positive sur $]0,+\infty[$, elle est aussi de classe C^∞ et vérifie $\forall x > 0 \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

1. Soient x et y deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

Pour $(x,y) \in \left(\mathbf{R}_+^*\right)^2$, on définit $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$.

2. Justifier l'existence de $\beta(x,y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

3. Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

4. Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x,y)$.

5. En déduire que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x+1,y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)$.

On veut montrer que pour $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

6. Expliquer pourquoi il suffit de montrer la relation $(\mathcal{R})$ pour $x > 1$ et $y > 1$.

Dans toute la suite, on supposera que $x > 1$ et $y > 1$.

7. Montrer que $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\mathrm{d}u\,.$

   On pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{u}{1+u}$.

8. On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbf{R}^+$ de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0. Montrer que :

$$\forall\, t \in \mathbf{R}^+,\ F_{x,y}(t) \leq \Gamma(x+y)\,.$$

9. Soit $G(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}\left((1+u)a\right)\mathrm{d}u\,.$

   Montrer que G est définie et continue sur $\mathbf{R}^+$.

10. Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

11. Montrer que G est de classe $\mathbf{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

12. Exprimer pour $a > 0$, $G'(a)$ en fonction de $\Gamma(x)$, e^{-a} et a^{y-1}.

13. Déduire de ce qui précède la relation $(\mathcal{R})$.

14. Pour $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, donner la valeur de $I_{p,q} = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-t)^p(1+t)^q \mathrm{d}t$.

Exercice 2 : Opérateurs sur un espace préhilbertien réel

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $\|.\|_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E tel que

$$\exists M \geq 0/ \ \forall x \in E, \ \|T(x)\|_E \leq M\|x\|_E \tag{1}$$

Soit $H = \ell^2(\mathbf{N})$, l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable :

$$\ell^2(\mathbf{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\}$$

On rappelle qu'un espace préhilbertien H est un espace vectoriel normé dont la norme $\| \quad \|_2$ dérive d'un produit scalaire noté $< .,. >$. On appelle base hilbertienne de H toute famille $B = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ telle que :

(i) la famille est orthonormale : pour tous $(i,j) \in \ \mathbf{N}^2, \ < b_i, b_j >= 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

(ii) tout élement x de H peut s'écrire $x = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} < x, b_i > b_i$ c'est à dire que

$$\lim_{N\to+\infty} \|x - \sum_{i=0}^{N} < x, b_i > b_i\| = 0$$

1. Montrer que si $B = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne de H, alors

$$\forall x \in H, \ \|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} | < x, b_i > |^2$$

2. Montrer que $H = \ell^2(\mathbf{N})$ est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(on justifiera qu'il s'agit bien d'un produit scalaire) puis déterminer une base hilbertienne de H.

Dans toute la suite, H désigne l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbf{N})$ muni du produit scalaire précédent.

3. Soit T un opérateur de H. On admettra l'existence d'un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall (x,y) \in H^2, \ < T(x), y >=< x, \tilde{T}(y) >$$

Soient $B = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ et $C = (c_i)_{i\in\mathbf{N}}$ deux bases hilbertiennes de H telles que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 < +\infty$$

Montrer que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|\tilde{T}(c_i)\|^2$$

4. Soit $B = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H et $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que la quantité (éventuellement infinie)

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2$$

ne dépend pas de la base B. On note

$$\|T\|_2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2$$

et on pose

$$\mathcal{L}^2(H) = \{T \in \mathcal{L}(H),\ \|T\|_2 < +\infty\}$$

5. Donner un exemple d'opérateur non nul dans $\mathcal{L}^2(H)$.

6. Montrer que $\mathcal{L}^2(H)$ possède une structure d'espace vectoriel.

7. Soient L et U dans $\mathcal{L}^2(H)$ et $B = (b_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la quantité

$$\sum_{i=0}^{+\infty} < L(b_i), U(b_i) >$$

est finie, indépendante de la base B choisie et définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(H)$.

8. On considère L et U deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Montrer que si $L \in \mathcal{L}^2(H)$, alors il en est de même pour UL.

9. Que se passe-t-il pour UL en supposant cette fois $U \in \mathcal{L}^2(H)$?