On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par $\mathbf{N}^2$, c'est-à-dire du type $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$.

Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle et on admet les deux résultats suivants :

• Si $\forall (i,j)\in\mathbf{N}^2 \quad a_{i,j}\geqslant 0$, alors les deux sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0,+\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.

• (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

1 Une première application

Soit $x\in]-1,1[$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(k+1)}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 1}\frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{nx^n}{1-x^n}$.

2 Une seconde application

On admet que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $u_n = n\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^3(k+1)}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

3 Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ définie par $\forall (i,j)\in\mathbf{N}^2 \quad b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i>j \\ -1 & \text{si } i=j \\ \dfrac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i<j \end{cases}$

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.
2. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.
3. A-t-on $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

4 Un second contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ définie par $\forall (i,j)\in\mathbf{N}^2 \quad c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i>j \\ j & \text{si } i=j \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i<j \end{cases}$

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.
2. Soit $j\in\mathbf{N}$; Montrer que la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}.\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.
3. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?