Exercice 1

Notons $\mathscr{A} = \left\{A \subseteq \mathbf{N}, \quad A \text{ fini ou } \bar{A} \text{ fini}\right\}$. Montrer que $\mathscr{A}$ n'est pas une tribu sur $\mathbf{N}$.

Exercice 2

• Soit Ω un ensemble, l'ensemble des parties finies de Ω est-il une tribu sur Ω ?

• Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur Ω est une tribu sur Ω.

Exercice 3

Soit $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}))$. Montrer que $\lim\limits_{n \to \mathbf{N}} \mathbf{P}\left(\{n\}\right) = 0$.

Exercice 4

On range aléatoirement cinq boules numérotées de 1 à 5 dans quatre boites de couleurs différentes.

1. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boite ?
2. Quelle est la probabilité que deux boites exactement soient vides ?
3. Quelle est la probabilité qu'aucune boite ne soit vide ?
4. En déduire la probabilité qu'une seule boite soit vide.

Exercice 5

Une information est transmise à l'intérieur d'une population. Avec une probabilité p, c'est l'information correcte qui est transmise à chaque étape d'une personne à une autre. Avec une probabilité $1 - p$, c'est l'information contraire qui est transmise. On note p_n la probabilité que l'information après n transmissions soit correcte.

1. Donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la valeur de p_n en fonction de p et de n.
3. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 6

Une puce saute entre trois points P, Q et R. Á chaque étape, elle saute vers l'un des deux autres points avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$, avec p_n, q_n et r_n les probabilités pour qu'au temps n la puce se trouve respectivement aux points P, Q et R.

1. Établir une relation entre p_{n+1} et p_n, q_n, r_n.
2. En déduire une relation matricielle de la forme $X_{n+1} = A.X_n$, avec A une matrice à préciser.
3. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2 et unitaire. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
4. Montrer que X_n possède une limite indépendante de X_0, quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes. Á chaque partie, celui qui perd donne un euro au gagnant. La probabilité que A gagne est $p \in]0, 1[$ et la probabilité que B gagne est $q = 1 - p$.

Les joueurs A et B possèdent à eux deux une somme totale de N euros. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs est ruiné, c'est-à-dire possède une somme nulle. On note p_k la probabilité qu'a le joueur A, en partant de la somme k supposée entière, d'être ruiné par la suite.

1. Calculer p_0 et p_N.
2. Montrer que $p_k = p.p_{k+1} + q.p_{k-1}$ pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$.
3. On suppose $p = \dfrac{1}{2}$. Justifier $p_k = \dfrac{N-k}{N}$.
4. On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $p_k = \dfrac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - \left(\dfrac{q}{p}\right)^k}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^N - 1}$.
5. Déduire de ce qui précède la probailité q_k qu'a le joueur B, en partant de la somme $N-k$, d'être ruiné par la suite.
   Calculer $p_k + q_k$. Interpréter le résultat.

On suppose maintenant que le joueur B est infiniment riche et le joueur A dispose d'une somme k.

6. On suppose $p \leqslant \dfrac{1}{2}$. Montrer que la probabilité que le joueur A se ruine est 1.
7. On suppose $p > \dfrac{1}{2}$. Montrer que la probabilité que le joueur A se ruine est : $\left(\dfrac{q}{p}\right)^k$.

Exercice 8

Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.
On note $B = \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k$.
On peut remarquer que $B = \{\omega \in_O, \quad \omega$ *appartient à une inifnité de* $A_n\}$.
On note $p_n = \mathbf{P}(A_n)$ et on suppose que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad p_n \neq 0$ et que la série $\sum p_n$ diverge.

1. Écrire $\overline{B}$ à l'aide des symboles $\cup$ et $\cap$.
2. Exprimer $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\right)$ en fonction des p_k.
3. Montrer que la série $\sum \ln(1-p_k)$ est divergente.
   On pourra distinguer les cas $\varphi_n \nrightarrow 0$ *et* $p_n \to 0$.
4. Quelle est la limite de $\sum_{k=1}^{n} \ln(1-p_k)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
5. En déduire que $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right) = 0$.
6. Que peut-on dire de la suite d'évémenets $\left(\bigcap_{k\geqslant n} \overline{A_k}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$?
7. En déduire que B est un événement presque sûr.