

On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on désigne par :

-  $P_n$  l'évènement « Pile apparaît au  $n^{\text{ième}}$  lancer »

-  $F_n$  l'évènement « Face apparaît au  $n^{\text{ième}}$  lancer ».

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Pour  $n \geq 3$ , on pose  $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$  et  $U_n = \bigcup_{k=3}^n B_k$ .

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  par :  $u_1 = u_2 = 0$  et  $\forall n \geq 2$   $u_n = P(U_n)$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  est monotone et convergente.
2. (a) Pour  $n \geq 3$ , calculer  $P(B_n)$ .
  - (b) Montrer, que pour tout  $n \geq 3$ , les évènements  $B_n, B_{n+1}$  et  $B_{n+2}$  sont deux à deux incompatibles.
  - (c) Calculer les valeurs de  $u_3, u_4$  et  $u_5$ .
3. Dans cette question, on suppose  $n \geq 5$ .
  - (a) Comparer les évènements  $U_n \cap B_{n+1}$  et  $U_{n-2} \cap B_{n+1}$ . Préciser leurs probabilités respectives.
  - (b) Montrer que pour tout  $n \geq 3$  :  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$ .
  - (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .
  - (d) Quelle est la probabilité de l'évènement « Pile n'apparaît jamais au cours de l'expérience » ?
4. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $v_n = 1 - u_n$ .
  - (a) Trouver des réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :  $\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = \alpha v_{n+2} + \beta v_{n+3}$ .
  - (b) Déterminer l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ , en déduire que la série de terme général  $v_n$  converge.
 

On pourra introduire  $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$ .
  - (c) Montrer, sans utiliser la question précédente, que la série de terme général  $v_n$  converge et déterminer  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ .

**Fin de l'énoncé**