Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Série entière d'une variable complexe :

Soit (a_n) une suite de complexes.
On appelle série entière (de la variable complexe) associée à la suite (a_n) la série de fonctions $\sum f_n$ où $\forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \to & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & a_n z^n \end{array}$. On la note $\sum a_n z^n$.

Série entière d'une variable réelle :

Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{K}$.
On appelle série entière (de la variable réelle) associée à la suite (a_n) la série de fonctions $\sum f_n$ où $\forall n \in \mathbf{N}, \quad f_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & a_n x^n \end{array}$. On la note $\sum a_n x^n$.

On définit de même les séries entières du type $\sum\limits_{n \geqslant n_0} a_n x^n$.

Exemples : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n} \qquad \sum \dfrac{z^n}{n!} \qquad \sum z^n$

Pour une série entière $\sum a_n x^n$ ou $\sum a_n z^n$ les termes a_n sont appelés coefficients de la série entière.

1 Rayon de convergence

On cherche à définir un élément de $[0, +\infty]$ qui permette d'obtenir des informations sur la nature de la série $\sum a_n z^n$ lorsque z, élément de $\mathbf{C}$, est fixé.

1.1 Définition

Proposition 1.1 *Lemme d'Abel*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

> S'il existe $z_0 \in \mathbf{C}^*$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée alors pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

Proposition 1.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.
L'ensemble $I = \{\rho \geqslant 0, \quad (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\}$ est un intervalle, contenant 0, inclus dans $\mathbf{R}^+$.

Definition 1.1 *Rayon de convergence*

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, l'élément de $[0, +\infty]$, noté R, défini par :

— $R = Sup I$ si I est majoré,
— $R = +\infty$ si I n'est pas majoré .

En convenant que si I n'est pas majoré ($I = [0, +\infty[$), alors I admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$ égale à $+\infty$, on peut définir le rayon de convergence R par :

$$\boxed{R = Sup\,\{\rho \geqslant 0, \quad (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}\,, \qquad R \in [0, +\infty]}$$

On a alors $I = [0, R]$ ou $I = [0, R[$.

La définition ci-dessus ne fait intervenir que la suite (a_n), donc pour une série entière d'une variable réelle $\sum a_n x^n$, la définition de rayon de convergence est la même.

Convention : Lorsque $R = +\infty$, on peut écrire $\forall z \in \mathbf{C}, \quad |z| < R$ et $\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| < R$.

Proposition 1.3 *Un cas particulier*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

$$\boxed{\sum a_n z^n \text{ et } \sum n a_n z^n \text{ ont même rayon de convergence.}}$$

De même $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Proposition 1.4 *Lien entre rayon de convergence et nature de la série entière*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Pour $z \in \mathbf{C}$,

- Si $|z| < R$ alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- Si $|z| > R$ alors $(a_n z^n)$ n'est pas bornée et donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $|z| = R$ alors il y a incertitude sur la nature de $\sum a_n z^n$.

Cas extrêmes :
Si $R = +\infty$ alors $\forall z \in \mathbf{C}, \quad \sum a_n z^n$ converge absolument.
Si $R = 0$ alors $\forall z \in \mathbf{C}, \quad \sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Les résultats précédents sont encore vrais pour une série entière d'une variable réelle, en remplaçant z par x.

Definition 1.2 *Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence*

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
   On appelle disque ouvert de convergence, l'ensemble, noté $D(O, R)$, défini par :
   • $D(O, R) = \{z \in \mathbf{C}, \quad |z| < R\}$ (*disque ouvert de centre O et de rayon R*), si $R \in \mathbf{R}^+$.
   • $D(O, R) = \mathbf{C}$ si $R = +\infty$.

Interprétation graphique :

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R. On appelle intervalle ouvert de convergence, l'intervalle $]-R, R[$.

   Interprétation graphique :

Exemple 1.1

Cas des séries entières $\sum z^n$, $\sum \dfrac{z^n}{n!}$, $\sum n^n z^n$.

1.2 Détermination pratique du rayon de convergence

Proposition 1.5 *Relations de comparaisons*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectifs R_a et R_b.

- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

Exemple 1.2

Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum \dfrac{z^n}{2n+1}$ $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) z^n$ $\sum \dfrac{z^n}{(2n)!}$.

Proposition 1.6 *Règle de d'Alembert pour une série entière*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang n_0.

S'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$ alors $R = \dfrac{1}{\ell}$

Avec la convention $R = +\infty$ *si* $\ell = 0$ *et* $R = 0$ *si* $\ell = +\infty$.

C'est une méthode particulièrement adaptée lorsque a_n s'écrit à l'aide de produits, exponentielles, factorielles.

Exemple 1.3

- Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum n!z^n \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}z^n \qquad \sum \frac{2^n}{n^2}z^n$.

- $\forall \alpha \in \mathbf{R}^* \quad \sum n^\alpha z^n$ est de rayon de convergence égal à 1.

Remarque 1.1 *Cas d'une série entière lacunaire*

On dit que la série entière $\sum a_n z^n$ est lacunaire lorsque : $\forall n \in \mathbf{N} \quad \exists k \geqslant n \quad a_k = 0$

Exemple : $\sum \frac{z^{2n}}{4^n+1}$ est une série entière lacunaire, il s'agit de la série entière $\sum a_n z^n$ avec $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{1}{4^n+1}$.

Avec des séries entières lacunaires du type $\sum b_n z^{2n}$, $\sum b_n z^{3n+1}$, on peut essayer d'appliquer la règle de d'Alembert à la série numérique $\sum u_n$ avec $u_n = b_n z^{2n}$, $u_n = b_n z^{3n+1}$. Application à l'exemple précédent.

1.3 Rayon de convergence et opérations sur les séries

Definition 1.3

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières et $\lambda \in \mathbf{K}$.

- On appelle produit par λ de la série entière $\sum a_n z^n$, la série entière $\sum \lambda a_n z^n$.

- On appelle somme des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

- On appelle produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition 1.7 *Somme de deux séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et $\lambda \in \mathbf{K}$.

$\sum \lambda a_n z^n$ est de rayon de convergence R_a et $\forall z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < R_a$, $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

En notant R le rayon de convergence de la série somme $\sum (a_n + b_n) z^n$, on a :

- $R \geqslant min(R_a, R_b)$

- Si $R_a \neq R_b$ alors $R = min(R_a, R_b)$.

- $\forall z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < min(R_a, R_b)$, $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$

Exemple 1.4

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum \frac{3n+4}{n!} z^n$.

Proposition 1.8 *Rayon de convergence de la série produit de Cauchy*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

On note R le rayon de convergence de la série produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ avec $\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.}$

- $R \geqslant min(R_a, R_b)$.
- $\forall z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < min(R_a, R_b)$, $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$

2 Régularité de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Proposition 2.1 **Convergence normale**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R.

La série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]-R, R[$.

On en déduit qu'il y a aussi convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

2.1 Continuité

Soit $\sum a_n x^n$, série entière de rayon de convergence R, notons $f : \begin{array}{ccc}]-R,R[& \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ sa somme.

f est continue sur $]-R, R[$.

2.2 Primitivation de la somme d'une série entière

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f : t \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

La fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est donc une primitive sur $]-R, R[$ de f, cette primitive est obtenue par intégration terme à terme.

Exemple 2.1

- $\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
- $\forall x \in]-1, 1[, \quad \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

2.3 Dérivation terme à terme

Proposition 2.2 *Classe C^1*

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $f : x \in]-R, R[\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, la somme de cette série entière.

$$\boxed{\begin{gathered} f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-R, R[\text{ et} \\ \forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{gathered}}$$

La dérivée est obtenue par dérivation terme à terme.

Exemple 2.2

La fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et vérifie l'équation différentielle $y' - y = 0$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

2.4 Caractère C^∞ de la somme d'une série entière

Proposition 2.3 *Classe C^k*

Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Soit $f : x \in]-R, R[\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, la somme de cette série entière.

$$\boxed{\begin{gathered} f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-R, R[\text{ et} \\ \forall k \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in]-R, R[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \end{gathered}}$$

Les dérivées sont obtenues par dérivation terme à terme.
On peut aussi écrire

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1) a_{n+k} x^n$$

Proposition 2.4 *Expression des coefficients à l'aide des dérivées successives*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}} \text{ et donc } \boxed{\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.}$$

Corollaire 2.5 *Unicité du développement en série entière*

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$.

$$\boxed{\text{S'il existe } r > 0 \text{ tel que } \forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \text{ alors } \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = b_n.}$$

Corollaire 2.6 *Application aux fonctions paires ou impaires*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- Si f est paire alors $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{2n+1} = 0$.
- Si f est impaire alors $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{2n} = 0$.

3 Développement en série entière au voisinage de 0

Definition 3.1 *DSE sur $]-r, r[$*

Soit $r > 0$ et soit $f : \begin{array}{ccc}]-r, r[& \to & \mathbf{K} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

On dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$, lorsque f est la somme d'une série entière sur $]-r, r[$.

C'est-à-dire $\boxed{\text{lorsqu'il existe une série entière } \sum a_n x^n \text{ telle que } \forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.}$

L'égalité $\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ s'appelle le développement en série entière de f sur $]-r,r[$, et R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ vérifie $R \geqslant r$.

Exemple 3.1

La fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et son développement en série entière est $\forall x \in]-1,1[, \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Definition 3.2 *DSE au voisinage de 0*

Soit $f : I \to \mathbf{K}$ tel que 0 soit un point intérieur à I (0 appartient à I et n'est pas une borne de I).

On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0, lorsqu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$.

Exemple 3.2

La fonction Arctangente est développable en série entière au voisinage de 0.

Proposition 3.1

Soit $f :]-r,r[\to \mathbf{K}$ avec $r > 0$.

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$.

De plus en notant $\sum a_n x^n$ une série entière telle que $\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$, alors $\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 3.2 *Unicité du développement en série entière*

Soient f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-r,r[$,avec $r > 0$, telles que $\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = g(x) \iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = b_n$

En particulier $\forall x \in]-r,r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \iff \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = 0$.

Definition 3.3 *Série de Taylor*

Soit $f :]-r, r[\to \mathbf{K}$ avec $r > 0$ une fonction de classe C^∞.

On appelle série de Taylor de f (*en 0*) la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$ alors f est somme de sa série de Taylor.

Proposition 3.3 *Formule de Taylor avec reste intégral*

Si f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I contenant 0 alors

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in I \quad f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t}$$

4 Séries entières et équations différentielles linéaires

4.1 Recherche d'un développement en série entière d'une fonction

Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière et/ou trouver son développement, on peut utiliser des combinaisons linéaires, des produits, des primitives, des dérivées de fonctions développables en série entière ou utiliser une équation différentielle :

Exemple 1 :

Trouver le développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2 - 4x + 3}$.

Exemple 2 :

$f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbf{R}^*$ vérifie le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} (1+x)y' - \alpha y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$.

Chercher une fonction développable en série entière S qui vérifie aussi ce problème de Cauchy sur un intervalle $]-r, r[$. Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on aura $f = S$ sur $]-r, r[$.

4.2 Recherche d'une solution d'un certain type d'équation différentielle

On cherche à résoudre une équation différentielle du type :

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$
ou
$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

avec a, b, c des fonctions polynômiales et f développable en série entière avec $d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ (éventuellement certains b_n sont nuls, voir tous à partir d'un certain rang).

Méthode générale : **pour déterminer les solutions développables en séries entière d'une équation différentielle, on procède par analyse-synthèse :**

• **Analyse** :

On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que sa somme f soit solution de l'équation (E).

Par définition $\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$.

On sait que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \text{ et}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

On écrit alors :
f est solution de l'équation différentielle $\Longleftrightarrow \cdots$ (on remplace dans l'équation différentielle $f(x), f'(x), f''(x)$ par leurs expressions et on développe).

Après développement en plusieurs sommes de $a(x)f''(x)$, $b(x)f'(x)$ et $c(x)f(x)$, on effectue si besoin un décalage d'indice pour se ramener **dans chaque somme à un terme de la forme $\alpha_n x^n$ avec α_n indépendant de x**, dans le but d'obtenir une égalité du type :

$$\boxed{f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-R, R[\quad \Longleftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = 0}$$

ou

$$\boxed{f \text{ solution de } (E') \text{ sur }]-R, R[\quad \Longleftrightarrow \forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = d(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n}$$

On en déduit, **par unicité d'un développement en série entière**, que $\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = 0$, ou $\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n = b_n$, ce qui donne une relation entre les coefficients $a_n, a_{n+1}, \cdots$.

Lorsque c'est possible, on exprime a_n en fonction de n à partir de la relation obtenue.

• **Synthèse** :

On introduit la série entière $\sum a_n x^n$ avec la relation entre $a_n, a_{n+1}, \cdots$ ou avec l'expression de a_n en fonction de n trouvée précédemment, et on **calcule le rayon de convergence** R, soigneusement (par exemple avec la règle de d'Alembert), pour vérifier que $R > 0$.

• **Conclusion** :

On peut alors écrire : Les calculs précédents ayant été faits par équivalence, on a montré que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions : $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Le cas échéant, on exprime f à l'aide de fonctions usuelles en reconnaissant des développements en série entière classiques.

Exemple : Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle : $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

5 Développements en série entière des fonctions usuelles

$\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$
$\forall x \in]-1,1[, \quad \mathrm{Arctan}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$
$\forall \alpha \in \mathbf{R}^*, \quad \forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\dfrac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbf{R}, \quad e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
$\forall z \in \mathbf{C}, \quad e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$
$\forall z \in \mathbf{C}, \quad \lvert z\rvert < 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$