Exercice 1

Soit (a_n) une suite de réels bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum \cos(n) z^n \qquad \sum 2^{(-1)^n} z^n \qquad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n \qquad \sum \frac{n+2}{n+1} z^n \qquad \sum n^{(-1)^n} z^n$$

Exercice 3

Déterminer le rayon de convergence, et calculer la somme sur le disque ouvert de convergence, des séries entières suivantes :

$$\sum \mathrm{ch}(n) z^n \qquad \sum e^{in\theta} z^n \text{ avec } \theta \in \mathbf{R} \qquad \sum a_n z^n \text{ avec } \forall n \in \mathbf{N} \ \begin{cases} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{cases}$$

Exercice 4

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R_a > 0$. On note R_b le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ avec $b_n = \dfrac{a_n}{1+|a_n|}$.

1. Montrer que $R_b \geqslant max(1, R_a)$.
2. Montrer que si $R_b > 1$ alors $R_b = R_a$.
3. Montrer que $R_b = max(1, R_a)$.

Exercice 5

Soit $u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} e^{-u_n}$.

1. Donner la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.
3. Sur quel ensemble la somme de cette série entière est-elle définie ?

Exercice 6

Soit $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leqslant 2^{n+2}$.
2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est non nul.
3. Soit $r = min(1, R)$. Pour $x \in]-r, r[$, on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Montrer que $S(x) = \dfrac{6x^2+6x-4}{(x+1)(x-1)^2}$.
4. Trouver trois réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \frac{6x^2+6x-4}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

5. En déduire une expression de a_n en fonction de n.

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \exp(-t^n)\mathrm{d}t$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'existence de I_n.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n, déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$ (*on donnera le résultat en fonction d'une intégrale J que l'on ne cherchera pas à calculer.*).
4. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum I_n x^n$.
5. Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \in \mathbf{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.

Exercice 8

Déterminer le rayon de converge ce de la série entière $\displaystyle\sum \frac{(n+1)(n+2)}{2^n} x^n$ puis la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^n}$.

Exercice 9

1. En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 .

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$.
On note R son rayon de convergence.

2. Montrer que $R \geq 1$.
3. Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.
4. En déduire la valeur de R.

On note alors, pour tout $x \in \left]-R, R\right[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.

5. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in} x^n$, où i désigne le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$.
6. En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-R, R\right[$.
7. Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.
8. En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos^2\left(\frac{n}{2}\right)}{n} x^n$.

Exercice 10

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 < a_n \leq 1$.
2. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Que pouvez-vous dire de son rayon de convergence ?

   Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
3. (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

   (b) Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$.

   (c) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n+2}$.

   Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

   (d) En déduire une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.
4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.
5. En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
6. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 11

Justifier que $x \mapsto e^x\cos(x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

On écrit $e^x\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!}x^n$. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n \in \mathbf{Z}$.

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$.

1. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Trouver une équation différentielle dont f' est solution et en déduire le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.