On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par P_n l'évènement « Pile apparaît au $n^{\text{ième}}$ lancer »et par F_n l'évènement « Face apparaît au $n^{\text{ième}}$ lancer ».

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

On note pour $n \geqslant 3$, $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ et $U_n = \displaystyle\bigcup_{k=3}^{n} B_k$.

On pose $u_1 = u_2 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$ $u_n = P(U_n)$.

1. D'après la définition de probabilité, on sait que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \in [0,1]$$

On a aussi $U_{n+1} = \displaystyle\bigcup_{k=3}^{n+1} B_k = U_n \cup B_{n+1}$, par conséquent $U_n \subset U_{n+1}$ et donc $P(U_n) \leqslant P(U_{n+1})$, d'où

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$

Avec les valeurs de u_1 et u_2, on a finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n \leqslant u_{n+1} \quad \text{et} \quad u_n \in [0,1]$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ est croissante et majorée, elle est donc convergente.}}$$

2. (a) D'après l'expérience décrite, les différents lancers sont faits indépendamment les uns des autres, on en déduit que pour $n \geqslant 3$, les évènements P_{n-2}, P_{n-1} et F_n sont mutuellement indépendants et donc

$$P(B_n) = P(P_{n-1}).P(P_{n-2}).P(F_n)$$

La pièce étant équilibrée, on a :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \quad P(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}}$$

(b) Par définition, pour $n \geqslant 3$:

$$B_n \cap B_{n+1} = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \cap P_n \cap P_{n+1}$$

or $P_n \cap F_n = \varnothing$, donc $B_n \cap B_{n+1} = \varnothing$.

De même

$$B_n \cap B_{n+2} = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \cup P_n \cap P_{n+1} \cap F_{n+2} = \varnothing$$

$$B_{n+1} \cap B_{n+2} = P_{n-1} \cap P_n \cap F_{n+1} \cap P_{n+1} \cap F_{n+2} = \varnothing$$

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 3, \text{ les évènements } B_n, B_{n+1} \text{ et } B_{n+2} \text{ sont deux à deux incompatibles.}}$$

(c) Comme vu en question 2.(a) on a : $u_3 = P(B_3) = \dfrac{1}{8}$.

Par incompatibilité de B_3 et B_4, on a :

$$u_4 = P(B_3 \cup B_4) = P(B_3) + P(B_4) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Par incompatibilité deux à deux de B_3, B_4 et B_5, on a :

$$u_5 = P(B_3 \cup B_4 \cup B_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{3}{8}$$

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

(a) Par définition de U_n et par distributivité de $\cap$ sur $\cup$, on a :

$$U_n \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n) \cap B_{n+1} = (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$$

et par incompatibilité deux à deux de B_{n-1}, B_n et B_{n+1}, on a :

$$\boxed{U_n \cap B_{n+1} = U_{n-2} \cap B_{n+1}}$$

L'évènement U_{n-2} ne fait intervenir que les lancers numérotés 1 à $n-2$ et B_{n+1} ne fait intervenir que les lancers numérotés $n-1$ à $n+1$, alors U_{n-2} et B_{n+1} sont indépendants, on aura donc :

$$\boxed{P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2}).P(B_{n+1}) = \frac{u_{n-2}}{8}}$$

(b) On déduit de ce qui précède que, pour $n \geqslant 3$:

$$u_{n+1} = P(U_{n+1}) = P(U_n \cup B_{n+1}) = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - \frac{u_{n-2}}{8}$$

ce qui donne

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2}) \text{ pour } n \geqslant 3.}$$

(c) On sait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge, notons L sa limite. L est aussi la limite de la suite (u_{n+1}) et de la suite (u_{n-2}), en passant à la limite sur l'égalité de la question précédente, on obtient :

$$L = L + \frac{1}{8}(1 - L)$$

ce qui donne immédiatement

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = L = 1}$$

(d) Notons A l'événement « Pile n'apparaît jamais au cours de l'expérience », d'événement contraire $\bar{A}$ = « Pile apparaît au moins une fois au cours de l'expérience ». On peut alors écrire :

$$\bar{A} = \bigcup_{n\geqslant 1} P_n$$

Or $\forall n \geq 1, \quad B_{n+2} \subset P_n$, on a alors

$$\bigcup_{n\geqslant 3} B_n \subset \bar{A}$$

et $U_n = \bigcup_{k=3}^{n} B_k$ donc

$$\bigcup_{n\geqslant 3} U_n = \bigcup_{n\geqslant 3} B_n \subset \bar{A}$$

$(U_n)_{n\geqslant 3}$ est une suite d'événements telle que $U_n \subset U_{n+1}$, alors par continuité croissante, on sait que :

$$1 = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} P(U_n) = P\left(\bigcup_{n\geqslant 3} U_n\right) \leqslant P(\bar{A}) \leqslant 1$$

Par conséquent

$$P(\bar{A}) = 1$$

et finalement $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0$.

$$\boxed{\text{L'évènement « Pile n'apparaît jamais au cours de l'expérience » est de probabilité nulle.}}$$

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Grâce à la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbf{N}^* \quad v_{n+3} &= 1 - u_{n+3} \\
&= 1 - \left(u_{n+2} + \frac{1}{8}(1 - u_n)\right) \\
\forall n \in \mathbf{N}^* \quad v_{n+3} &= v_{n+2} - \frac{1}{8} v_n
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 8v_{n+2} - 8v_{n+3}}$

   (b) On pose $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 1$. D'après la relation de récurrence vérifiée par (v_n), on peut écrire :

$$X_{n+1} = A.X_n \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• Par convention $A^0 = I_3$ alors $X_1 = A^0.X_1$.
Si $X_n = A^{n-1}X_1$ alors $X_{n+1} = A.X_n = A(A^{n-1}X_1) = A^n X_1$, ce qui montre par récurrence que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad X_n = A^{n-1} X_1$$

et d'après les valeurs de u_1, u_2 et u_3, on a : $X_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 7/8 \end{pmatrix}$.

• Pour trouver les puissances de la matrice A, on peut essayer de diagonaliser cette matrice ou de trouver un polynôme annulateur :
Notons χ_A le polynôme caractéristique de A.

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \chi_A(x) = det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ \frac{1}{8} & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

On effectue alors l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + xL_1$ qui permet d'obtenir :
$\forall x \in \mathbf{R} \quad \chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ x^2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{8} & 0 & x-1 \end{vmatrix}$
Par développement par rapport à la seconde colonne

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \chi_A(x) = (-1)^{1+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} x^2 & -1 \\ \frac{1}{8} & x-1 \end{vmatrix} = x^2(x-1) + \frac{1}{8} = x^3 - x^2 + \frac{1}{8}$$

La présence du x^3 et $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ suggère d'essayer de voir si $\lambda = \frac{1}{2}$ est racine de χ_A, ce qui est le cas, alors on peut factoriser complètement χ_A dans $\mathbf{R}$:

$$\chi_A(X) = (X - 1/2)(X - \lambda)(X - \mu) \text{ avec } \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

χ_A est scindé à racines simples et il est annulateur de A par le théorème de Cayley-Hamilton, on en conclut que A est diagonalisable et qu'il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = P. \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} .P^{-1}$$

On montre alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad A^n = P. \begin{pmatrix} 1/2^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$

Le polynôme χ_A étant annulateur de A, on peut aussi obtenir par division euclidienne l'existence de Q_n et R_n tels que $X^n = Q_n \times \chi_A + R_n$ avec $deg(R_n) < deg(\chi_A)$ donc $R_n = a_nX^2 + b_nX + c_n$ et chercher a_n, b_n, c_n mais ce n'est pas plus rapide.

Les coefficients des matrices P et P^{-1} (que l'on ne cherche pas) ne dépendent pas de n, alors par la formule du produit matriciel, les coefficients de $A^n = P. \begin{pmatrix} 1/2^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix} .P^{-1}$, sont des combinaisons linéaires des réels $\frac{1}{2^n}$, λ^n et μ^n.

On en déduit que v_n, qui est la première ligne de $X_n = A^{n-1}.X_1$, s'écrit sous la forme :

$$v_n = a.\frac{1}{2^{n-1}} + b\lambda^{n-1} + c\mu^{n-1}$$

avec a, b, c indépendants de n. On trouve les valeurs de a, b, c en résolvant le système linéaire d'inconnues a, b, c donné par $v_1 = 1$, $v_2 = 1$ et $v_3 = \dfrac{7}{8}$. On trouve finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad v_n = -\frac{1}{2^n} + \left(\frac{3}{4} + \frac{7\sqrt{5}}{20}\right)\lambda^{n-1} + \left(\frac{3}{4} - \frac{7\sqrt{5}}{20}\right)\mu^{n-1}}$$

Les réels $\dfrac{1}{2}$, λ et μ sont dans l'intervalle $]-1, 1[$, les séries de terme général $\dfrac{1}{2^{n-1}}$, λ^{n-1} et μ^{n-1} sont donc convergentes.

$$\boxed{\text{Par combinaison linéaire la série de terme général } v_n \text{ est aussi convergente.}}$$

(c) D'après la relation $v_n = 8v_{n+2} - 8v_{n+3}$, on aura par télescopage :

$$\forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} v_n = 8\sum_{n=1}^{N}(v_{n+2} - v_{n+3}) = 8(v_3 - v_{N+3})$$

La suite (u_n) converge vers 1 (question 3(c)) alors la suite (v_n) converge vers 0 et par passage à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ dans l'égalité ci-dessus on obtient la convergence de la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$, donc la convergence de la série $\sum v_n$ avec :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} v_n = 8v_3 = 7}$$