Exercice 1

On s'intéresse à l'équation différentielle (E) : $xy''(x) + xy'(x) - y(x) = 0$.

1. Trouver une fonction polynômiale vérifiant (E).
2. Pour $x > 0$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t$. Dresser le tableau des variations de G sur $]0, +\infty[$.
3. Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et $S : x \mapsto xf(x)$.
   Montrer que S est solution de (E) si et seulement si f' vérifie une équation différentielle d'ordre 1.
4. Résoudre (E).

Exercice 2

Déterminer les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivables vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad f'(x) + f(-x) = e^x$$

Exercice 3

Soit f une solution de l'équation différentielle $y''(t) + e^{it}y(t) = 0$.
Montrer que f est 2π-périodique si et seulement si $f(0) = f(2\pi)$ et $f'(0) = f'(2\pi)$.

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (E) : $y''(x) = (x^2 - 1)y(x)$.

1. Montrer que si f est une solution de (E) vérifiant $f(0) = 0$ alors f est impaire.
2. Montrer que si f est une solution de (E) vérifiant $f'(0) = 0$ alors f est paire.
3. Pour quelle(s) valeur(s) de $a \in \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto e^{ax^2}$ est-elle solution de (E) ?
4. Exprimer l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $v : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{t^2/2}\mathrm{d}t$.

Exercice 5

On considère sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle (E) : $ty''(t) + 2y'(t) - ty(t) = t$.

1. Trouver une solution particulière très simple de (E).
2. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène associée à (E).
3. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
4. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$.

Exercice 6

On pose pour $S_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et $S_2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$.

1. Donner les rayons de convergence de S_1 et S_2.
2. Trouver des équations différentielles liant S_1 et S_2.
3. Résoudre et donner des expressions réelles de $S_1(x)$ et $S_2(x)$.