PSI Lundi 19 janvier 2026 - 3 heures

Sans calculatrice

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Étant donné un réel μ ($\mu \in \mathbf{R}$), soit (E_μ) l'équation différentielle ci-dessous :

$$(E_\mu) \qquad 16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, il est admis que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_μ) sur cet intervalle I, est un espace vectoriel $E_\mu(I)$.

Première partie

1 ▷ Intervalles de définition des solutions

Déterminer trois intervalles I, les plus grands possibles, deux à deux disjoints, pour lesquels la dimension de l'espace vectoriel $E_\mu(I)$ est égale à 2.

2 ▷ Solutions de (E_μ) développables en série entière dans un intervalle de centre 0

Soit y une fonction inconnue, égale à la somme d'une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(a) Déterminer la relation nécessaire et suffisante entre les coefficients a_n et a_{n+1}, $n \geq 0$, pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle (E_μ). En déduire une expression du coefficient a_n en fonction des réels a_0, n et μ (introduire $(2n)!$).

(b) Le réel a_0 étant supposé différent de 0, déterminer suivant les valeurs du réel μ , le rayon de convergence R. Expliciter le coefficient a_n lorsque R est infini.

Dans les questions 3) et 4) les réels a_0 et μ sont égaux à 1 : $a_0 = 1, \quad \mu = 1$.
Soit φ la fonction définie au moins sur l'intervalle $]-R, R[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

3 ▷ Étude de la fonction φ

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n = \dfrac{-1}{2^{4n}(4n-1)}\dbinom{4n}{2n}$.
Déterminer, deux réels α et k (k différent de 0), tels que :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$$

(b) Démontrer que la fonction φ est définie et continue sur l'intervalle fermé $[-R, R]$.

(c) Justifier que φ est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$, puis montrer que sa dérivée φ' admet une limite à droite en $-R$; en déduire que φ est de classe C^1 sur $[-R, R[$.

4 ▷ Étude de la dérivée φ' lorsque le réel x tend vers 1

(a) **Un résultat préparatoire** : soit une suite réelle positive $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série entière $\sum b_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1. Soit $g(x)$ la somme de cette série : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Démontrer que si la fonction g est majorée sur l'intervalle $[0, 1[$, la série numérique $\sum b_n$ est convergente.

(b) Préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n a_n$. En déduire le comportement de $\varphi'(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Deuxième partie

Dans cette partie le réel μ est égal à 1 ; le but est de résoudre l'équation différentielle (E_1) sur l'intervalle $I =]0, 1[$. Il pourra être utile de poser :

$$E_1(y)(x) = 16(x^2 - x)y''(x) + (16x - 8)y'(x) - y(x)$$

Soit θ la fonction $t \mapsto x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(t))$, définie sur l'intervalle $]0, \pi[$.

5 ▷ Déterminer une équation différentielle (F) telle que la fonction y est solution de (E_1) si, et seulement si, la fonction $z = y \circ \theta : t \mapsto y(\theta(t))$ est solution de (F) sur $]0, \pi[$.

6 ▷ En supposant connu le résultat ci-dessous, valable pour $t \in]0, \pi[$:

$$\cos\left(\frac{t}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos(t)}{2}}}, \qquad \sin\left(\frac{t}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\cos(t)}{2}}}$$

Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle (E_1) dans l'intervalle I.

7 ▷ En déduire une expression de la restriction à l'intervalle I de la fonction φ étudiée dans les questions 3 et 4, à l'aide de fonctions élémentaires.

Troisième partie

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies et de classe C^∞ sur l'intervalle $\overline{I} = [0, 1]$. Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}$ qui fait correspondre à une fonction f son image $D(f)$ définie par la relation :

$$D(f) : x \mapsto 16(x^2 - x)f''(x) + (16x - 8)f'(x)$$

8 ▷ L'espace préhilbertien réel $(\mathcal{C}, (.|.))$

Étant donné deux fonctions f et g appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{C}$, démontrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur I.

Par convention : pour deux fonctions f et g de l'espace $\mathcal{C}$, le symbole $(f|g)$ désigne la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

Il est admis dans la suite que l'application $(f, g) \mapsto (f|g)$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$ est un produit scalaire. Ainsi $\mathcal{C}$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien réel.

9 ▷ Une propriété de l'endomorphisme D

Démontrer que, pour tout couple de fonctions f et g de l'espace $\mathcal{C}$, il vient :

$$(f|D(g)) = (D(f)|g)$$

Indication : cette égalité peut par exemple être démontrée en admettant la relation :

$$D(f)(x) = -16u'(x)\sqrt{x - x^2} \quad \text{avec } u(x) = f'(x)\sqrt{x - x^2}$$

10 ▷ Valeurs propres et sous-espaces propres

(a) Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme D. Démontrer que cette valeur propre est un réel positif ou nul ($\lambda \geq 0$).

(b) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes, démontrer que les sous-espaces propres G_λ et G_μ associés sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien réel $\mathcal{C}$.

11 ▷ Noyau et image de l'endomorphisme D

(a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme D.

(b) Démontrer que toute fonction h de l'espace image de D ($Im(D)$) est orthogonale à la fonction constante égale à 1 : $(h|1) = 0$.

12 ▷ Dimension d'un sous-espace propre G_μ associé à une valeur propre μ

Soit μ une valeur propre de l'endomorphisme D, G_μ le sous-espace propre associé.

(a) Démontrer que la dimension du sous-espace propre G_μ est inférieure ou égale à 2.

(b) Étant données deux fonctions y_1 et y_2 appartenant à G_μ, soit $W : x \mapsto det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$.
Déterminer cette fonction W (on pourra calculer $W'(x)$).
En déduire la dimension du sous-espace propre G_μ.

13 ▷ Élements propres de l'application Δ

Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ des restrictions des fonctions polynomiales à l'intervalle $\bar{I}$.

(a) Démontrer que ce sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ est stable par D.

On note Δ l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ induit par D.

(b) Déterminer la suite croissante $(\lambda_q)_{q\in\mathbf{N}}$ des valeurs propres de l'endomorphisme Δ ainsi que le sous-espace propre associé à chaque valeur propre λ_q.

Pour chaque valeur propre λ_q, $q \in \mathbf{N}$, préciser le degré de la fonction polynomiale T_q, élément propre associé à la valeur propre λ_q qui vérifie la condition $T_q(0) = 1$.

(c) Démontrer que l'espace image de l'application Δ ($Im(\Delta)$) est l'espace vectoriel des éléments h de $\mathcal{P}$ qui vérifient $(h|1) = 0$.

14 ▹ Valeurs propres de l'endomorphisme D

On admet que pour toute fonction f de $\mathcal{C}$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge uniformément vers f sur l'intervalle $\bar{I} = [0, 1]$.

(a) Soit g une fonction de $\mathcal{C}$ supposée orthogonale au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$. Démontrer, en utilisant le résultat admis ci-dessus, que la fonction g est nulle.

(b) En déduire les valeurs propres de l'endomorphisme D.

FIN DU PROBLÈME