

Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

Exercice 2

On lance 4 fois de suite une pièce. Soit X le nombre de fois qu'apparaît la séquence PF. Déterminer la loi de X .

Exercice 3

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que la probabilité que X soit paire est plus forte que X impaire.

Exercice 4

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X la fonction F_X définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad F_X(t) = \mathbf{P}(X \leq t)$$

1. Déterminer F_X lorsque $X \sim \mathcal{B}(p)$.
2. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 1, 2\}$ dont la fonction de répartition

$$\text{est donnée par } F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq t < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geq 2 \end{cases} .$$

Déterminer la loi de X .

3. Déterminer F_X lorsque $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) une famille de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli de paramètre p . On considère la matrice $M = (X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Quelle est la loi du rang de M ? Quelle est la loi de la trace de M ?
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur?
3. Reprendre la question ci-dessus dans le cas où la loi suivie par les variables X_1, \dots, X_n est une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 6

On considère trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 et Y telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\mu)$, $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = p \in]0, 1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que M soit inversible.
2. Calculer la probabilité que les valeurs propres de M soient réelles.
3. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable.

Exercice 7

On lance une pièce équilibrée, et on note :

- X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la séquence «Pile-Face».
- Y la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier «Pile».

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. En déduire la loi de X .
3. Calculer l'espérance de X .
4. Reprendre les questions précédentes lorsque la pièce n'est plus équilibrée et que la probabilité d'obtenir Pile est égale à $p \in]0, 1[$.

Exercice 8

On lance une pièce donnant Pile avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. On pose $a_n = \mathbf{P}(X = n)$.

1. Calculer a_1 et a_2 .
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.
3. Montrer que le jeu se termine presque sûrement.
4. Calculer l'espérance de X .

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N}^* vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = n) = a3^{-n}$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse ainsi une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que X est d'espérance finie et la calculer.
4. On considère la variable aléatoire $Y = X(X - 1)$. Montrer que Y est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles telle que $X(\Omega) \subset [a, b]$ avec $a < b$.

1. Montrer que X^2 est d'espérance finie.
2. Soit $f : t \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{E}((X - t)^2)$. Montrer que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.
3. En déduire que $\mathbf{V}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs.

On définit la fonction $\Phi_X : \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ par :

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{t} \ln(E(e^{tX}))$$

1. Justifier que la fonction Φ_X est bien définie sur \mathbf{R}^* .
2. Montrer que Φ_X admet un prolongement par continuité en $t = 0$, et donner ce prolongement.
3. Montrer que Φ_X est dérivable en 0, et calculer $\Phi'_X(0)$.

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs et $p \in [1, +\infty[$. On définit la fonction $S_X : t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{P}(X > t)$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{p-1} S_X(t) dt$ converge.
2. Montrer que $\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} S_X(t) dt$.

Exercice 13

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $\mathcal{P}_n(2)$ l'ensemble des parties à 2 éléments de $[[1, n]]$ et si $I = \{i, j\}$ on pose $Y_I = X_i X_j$. Pour $n \geq 2$, on pose $V_n = \sum_{I \in \mathcal{P}_n(2)} Y_I$.

1. Soit $I \in \mathcal{P}_n(2)$. Déterminer la loi de Y_I .
2. Soit $(I, J) \in \mathcal{P}_n(2)^2$. Déterminer la covariance de Y_I et Y_J .
3. On pose $W_n = \frac{V_n}{n(n-1)}$. Pour $\varepsilon > 0$, déterminer la limite de la suite de terme général

$$\mathbf{P}\left(\left|W_n - \frac{p^2}{2}\right| \geq \varepsilon\right).$$

Exercice 14

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\forall i \in \mathbf{N}^* \quad X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i \in]0, 1[$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = p \in [0, 1]$.

Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.