Exercice 1

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probbailisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ qui suit une loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0,1[$. Déterminer la loi de $Y = \left\lfloor \dfrac{X+1}{2} \right\rfloor$.

Exercice 3

On lance 4 fois de suite une pièce. Soit X le nombre de fois qu'apparaît la séquence PF. Déterminer la loi de X.

Exercice 4

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que la probabilité que X soit paire est plus forte que X impaire.

Exercice 5

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X la fonction F_X définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t)$$

1. Déterminer F_X lorsque $X \sim \mathcal{B}(p)$.
2. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{-1, 1, 2\}$ dont la fonction de répartition est donnée par $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant t < 1 \\ \dfrac{3}{4} & \text{si } 1 \leqslant t < 2 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$.
   Déterminer la loi de X.
3. Déterminer F_X lorsque $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires *i.i.d.* de loi de Bernoulli de paramètre p. On considère la matrice $M = (X_i X_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Quelle est la loi du rang de M ? Quelle est la loi de la trace de M ?
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

3. Reprendre la question ci-dessus dans le cas où la loi suivie par les variables $X_1, \ldots, X_n$ est une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 7

On considère trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 et Y telles que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $X_2 \sim \mathcal{P}(\mu)$, $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = p \in]0, 1[$. On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que M soit inversible.
2. Calculer la probabilité que les valeurs propres de M soient réelles.
3. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable.

Exercice 8

On lance une pièce équilibrée, et on note :
• X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir la séquence «Pile-Face».
• Y la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier «Pile».

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X.

4. Reprendre les questions précédentes lorsque la pièce n'est plus équilibrée et que la probabilité d'obtenir Pile est égale à $p \in]0, 1[$.

Exercice 9

On lance une pièce donnant Pile avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois deux piles consécutifs. On pose $a_n = \mathbf{P}(X = n)$.

1. Calculer a_1 et a_2.
2. A l'aide de la formule des probbailités totales, montrer que $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$.
3. Montrer que le jeu se termine presque sûrement.
4. Calculer l'espérance de X.

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{P}(X = n) = a3^{-n}$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse ainsi une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?
3. Montrer que X est d'espérance finie et la calculer.
4. On considère la variable aléatoire $Y = X(X - 1)$. Montrer que Y est d'espérance finie et la calculer.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles telle que $X(\Omega) \subset [a, b]$ avec $a < b$.

1. Montrer que X^2 est d'espérance finie.
2. Soit $f : t \in \mathbf{R} \mapsto \mathbf{E}((X - t)^2)$. Montrer que $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.
3. En déduire que $\mathbf{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs.
On définit la fonction $\Phi_X : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ par :

$$\Phi_X(t) = \frac{1}{t} \ln\left(E\left(e^{tX}\right)\right)$$

1. Justifier que la fonction Φ_X est bien définie sur $\mathbf{R}^*$.
2. Montrer que Φ_X admet un prolongement par continuité en $t = 0$, et donner ce prolongement.
3. Montrer que Φ_X est dérivable en 0, et calculer $\Phi'_X(0)$.

Exercice 13

Soit X une variable aléatoire réelle positive prenant un nombre fini de valeurs et $p \in [1, +\infty[$. On définit la fonction $S_X : t \in \mathbf{R}^+ \mapsto \mathbf{P}(X > t)$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} S_X(t) \mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $\mathbf{E}(X^p) = p \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{p-1} S_X(t)$.

Exercice 14

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $\mathcal{P}_n(2)$ l'ensemble des parties à 2 éléments de $[\![1, n]\!]$ et si $I = \{i, j\}$ on pose $Y_I = X_i X_j$. Pour $n \geqslant 2$, on pose $V_n = \displaystyle\sum_{I\in\mathcal{P}_n(2)} Y_I$.

1. Soit $I \in \mathcal{P}_n(2)$. Déterminer la loi de Y_I.
2. Soit $(I, J) \in \mathcal{P}_n(2)^2$. Déterminer la covariance de Y_I et Y_J.
3. On pose $W_n = \dfrac{V_n}{n(n-1)}$. Pour $\varepsilon > 0$, déterminer la limite de la suite de terme hgénéral $\mathbf{P}\left(\left|W_n - \dfrac{p^2}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

Exercice 15

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\forall i \in \mathbf{N}^* \quad X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i \in]0, 1[$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i = p \in [0, 1]$.

Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$.