Dans tout ce chapitre $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ désigne un espace probabilisé.
E désigne un ensemble. On se limitera ici à $E = \mathbf{R}$ ou $E = \mathbf{R}^p$.

1 Généralités sur les variables aléatoires discrètes

Definition 1.1

On appelle variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow E \\ \omega \mapsto X(\omega) \end{array}$ telle que :

- $X(\Omega) = \{X(\omega), \omega \in \Omega\}$ est au plus dénombrable.
- $\forall x \in X(\Omega), \quad X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) = x\} \in \mathscr{A}$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une variable aléatoire discrète finie.
Lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable on dit que X est variable aléatoire discrète infinie.

• Si $E = \mathbf{R}$, X est dite variable aléatoire réelle discrète et on peut noter $X(\Omega) = \{x_i, \quad i \in I\}$, les x_i étant deux à deux distincts, avec $I = [\![1, n]\!]$ ou $I = \mathbf{N}$ suivant que $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

• Si $E = \mathbf{R}^p$, X est appelé vecteur aléatoire réel discret.

Remarque 1.1

$$\forall \quad B \subset X(\Omega) \qquad X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \in B\} \text{ est un événement.}$$

Notations :

• L'événement $X^{-1}(B)$ sous la forme $(X \in B)$ ou $\{X \in B\}$,

• **en particulier** pour $x \in X(\Omega)$, l'événement $X^{-1}(\{x\})$ se notera $(X = x)$ ou $\{X = x\}$.

• Lorsque X est à valeurs réelles, $(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) \leqslant x\}$.

Exemple 1.1

- Si A est un évènement, $1_A : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \\ \omega \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } \omega \notin A \\ 1 \text{ si } \omega \in A \end{cases} \end{array}$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $1_A(\Omega) = \{0, 1\}$.
- On lance un dé 2 fois de suite. Soit X le couple (plus petit numéro obtenu, somme des numéros obtenus), X est un vecteur aléatoire discret fini.
- On répète une infinité de fois une expérience de Bernoulli (expérience à deux issues : succès ou échec), soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'échecs obtenus avant le premier succès.

Décrire Ω, $X(\Omega)$ et $(X = n)$ pour $n \in X(\Omega)$.

Definition 1.2 *Fonction d'une variable aléatoire*

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$, et soit $f : X(\Omega) \subset E \to F$.

On peut définir la composée $f \circ X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow F \\ \omega \mapsto f(X(\omega)) \end{array}$.

$f \circ X$, notée $f(X)$, est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Definition 1.3 *Couple de variables aléatoires*

Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$.
L'application $Z : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow E \times F \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$, notée $Z = (X, Y)$, est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A})$ telle que :

- $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, donc $Z(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
- $\forall z = (x, y) \in Z(\Omega)$, $(Z = z) = (X = x) \cap (Y = y) \in \mathscr{A}$

La variable aléatoire $Z = (X, Y)$ est appelée couple des variables aléatoires X et Y.

Notation : L'événement $(Z = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y)$ sera, en général, noté $(X = x, Y = y)$.

Remarque 1.2 *Opérations algébriques*

Soient $X : \Omega \to \mathbf{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\boxed{\lambda X,\ X + Y,\ XY \text{ sont des variables aléatoires réelles discrètes sur } (\Omega, \mathscr{A})}$.

Definition 1.4 *Extension à un n-uplet de variables aléatoires*

Si $X_1 : \Omega \to E_1, \dots, X_n : \Omega \to E_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors on dispose du vecteur aléatoire $Z = (X_1, \dots, X_n) : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E_1 \times \dots \times E_n \\ \omega & \mapsto & (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{array}$
qui vérifie :

- $Z(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$, donc $Z(\Omega)$ est fini ou dénombrable,
- $\forall (x_1, \dots, x_n) \in Z(\Omega)$, $Z^{-1}(\{(x_1, \dots, x_n)\}) = X_1^{-1}(\{x_1\}) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(\{x_n\}) \in \mathscr{A}$

Tout n-uplet de variables aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète.

Notation : L'événement $(Z = (x_1, \dots, x_n)) = (X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)$ sera, en général, noté $(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$.

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Definition 2.1 *Loi d'une variable aléatoire discrète*

Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$,

on appelle loi de probabilité de X, l'application $P_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P(X \in B) \end{array}$.

P_X est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

La loi de X est déterminée par la distribution de probablités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, c'est pourquoi on appellera plutôt

loi de X la donnée de $X(\Omega)$ et des probabilités $P(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Remarque 2.1

• Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, les x_i deux à deux distincts et $I = \mathbf{N}$ ou $I = [\![1, n]\!]$, alors :

$(\{X = x_i\})_{i \in I}$ est un système complet d'événements

et

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1.$$

• Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et f est une application définie sur $X(\Omega)$, alors la loi de $Y = f(X)$ est donnée par $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega), f(x) = y} P(X = x)$$

• Lorsque deux variables aléatoires X et Y ont même loi, on note $X \sim Y$.

Et si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$ pour toute fonction f définie sur $X(\Omega) = Y(\Omega)$.

Definition 2.2 *Loi conditionnelle de X sachant A*

Soit A un événement tel que $P(A) \neq 0$ et X une variable aléatoire.

On appelle loi conditionnelle de X sachant A, la loi de X relativement à la probabilité P_A c'est-à-dire l'application $\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & P_A(X = x) = \dfrac{P(A \cap (X = x))}{P(A)} \end{array}$.

Exemple 2.1

On lance une infinité de fois une pièce non équilibrée qui amène Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On note X la variable aléatoire égale au rang du second Pile et A l'événement : le premier Pile est obtenu au second lancer. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant A.

3 Lois discrètes usuelles

3.1 Loi uniforme

Soient X une variable aléatoire sur Ω et E un ensemble fini non vide.

On dit que X suit la loi uniforme sur E, et on note $X \sim \mathcal{U}(E)$ lorsque $X(\Omega) = E$ et

$$\forall x \in E, \quad P(X = x) = \frac{1}{card(E)}$$

La loi uniforme est la loi pour laquelle les événements $(X = x)$, x décrivant E, sont équiprobables.

Modèle : Résultat du lancer d'un dé non pipé.
Résultat d'un tirage d'une boule dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

3.2 Loi de Bernoulli de paramètre p

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ lorsque

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{avec} \quad P(X = 1) = p \quad (\text{et donc } P(X = 0) = 1 - p)$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$ ou $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

Modèle : On réalise une expérience ayant deux issues possibles succès-échec (Epreuve de Bernoulli), le succès étant obtenu avec une probabilité égale à p. On note $(X = 1)$ l'événement "avoir obtenu un succès" et $(X = 0) = \overline{(X = 1)}$.

Par exemple : on effectue le tirage d'une boule dans une urne contenant des boules blanches en proportion p et des boules noires. On note $(X = 1)$ l'événement " on a obtenu une boule blanche".

Remarque 3.1

Si A est un événement, la variable aléatoire $\mathbf{1}_A : \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0,1\} \\ \omega & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{cases} \end{array}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.

3.3 Loi binomiale de paramètre (n,p)

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

On dit que X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) si :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!], \quad \text{et } \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

On note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Modèle : On réalise, de façon indépendante , n fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre p, et X est le nombre de succès obtenus au bout de ces n épreuves.

3.4 Loi géométrique de paramètre p

Soit $p \in]0,1[$, soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète.

On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p lorsque

$$X(\Omega) = \mathbf{N}^* \text{ et } \quad \forall k \in \mathbf{N}^* \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

On note : $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Modèle : Nombre d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes nécessaires à l'obtention du premier succès.

Exemple : Une urne contient des boules de couleurs différentes dont des boules blanches en proportion p. On effectue des tirages successifs avec remise et on considère X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche.

Proposition 3.1

$$\boxed{X \sim \mathcal{G}(p) \text{ alors } \forall k \in \mathbf{N}^*, \quad P(X > k) = (1-p)^k.}$$

3.5 Loi de Poisson

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète.
Soit $\lambda > 0$.

On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque

$$X(\Omega) = \mathbf{N} \text{ et } \quad \forall k \in \mathbf{N} \qquad P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Interprétation en termes d'événements rares

4 Couples de variables aléatoires, indépendance de variables aléatoires

Dans tout ce paragraphe $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ désignent des variables aléatoires discrètes réelles définies sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

On note $Z = (X, Y)$, c'est-à-dire $Z : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow E \times F \\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$

4.1 Loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles

Definition 4.1 *Loi conjointe - Lois marginales*

• On appelle loi conjointe de X et de Y, la loi de $Z = (X, Y)$.
Elle est donnée par la famille $(P(X = x, Y = y))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$.

• On appelle lois marginales du couple (X, Y), les lois de X et de Y, données par la formule des probabilités totales :

- $\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$
- $\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X = x, Y = y).$

Definition 4.2 *Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$*

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$.

On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$, la loi de Y relativement à la probabilité $P_{(X=x)}$

c'est-à-dire l'application $\begin{array}{l} Y(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\ y \mapsto P_{(X=x)}(Y = y) = \dfrac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)} \end{array}$.

On peut de même définir la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$.

Remarque 4.1 *Extension à un n-uplet de variables alétaoires*

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors la loi de $Z = (X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par $X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ et

$$\forall (x, 1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega) \quad P(Z = (x_1, \ldots, x_n)) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

La loi marginale de X_1 est donnée par $X_1(\Omega)$ et

$$\forall x_1 \in X_1(\Omega) \quad P(X_1 = x_1) = \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in X_2(\Omega)\times\cdots\times X_n(\Omega)} P(X_= x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

De même pour la loi marginale de X_i pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.

4.2 Indépendance de variables aléatoires

Definition 4.3 *Indépendance de deux variables aléatoires*

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires discrètes.

On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque

$$\boxed{\forall A \subset X(\Omega), \quad \forall B \subset Y(\Omega), \quad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A).P(Y \in B)}$$

De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x).P(Y = y)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Definition 4.4 *Suite i.i.d.*

- Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

  On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes lorsque :
  $\forall x_1 \in X_1(\Omega), \ldots, \forall x_n \in X_n(\Omega)$

  $$\boxed{P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k = x_k)\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)}$$

- On appelle suite de variables aléatoires indépendantes, toute suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $\forall n \in \mathbf{N} \quad X_0, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes.

- On appelle suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, notée suite i.i.d., toute suite $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de variables aléatoires indépendantes telle que $\forall i \neq j \quad X_i \sim X_j$.

Proposition 4.1 *Fonctions de variables indépendantes*

- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$, avec f et g des fonctions respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.

- Lemme des coalitions
  si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes alors

  $$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad f(X_1, \ldots, X_k) \perp\!\!\!\perp g(X_{k+1}, \ldots, X_n)$$

  On peut étendre au cas de plus de deux coalitions.

5 Espérance, variance et covariance

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

5.1 Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Definition 5.1 *Espérance d'une v.a. à valeurs dans* $[0, +\infty]$

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$, on définit son espérance par :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

avec la convention $xP(X = x) = 0$ lorsque $x = +\infty$ avec $P(X = x) = 0$.

Exemple 5.1

Déterminer l'espérance d'une variable aléatoire suivant une des lois usuelles discrètes.

Definition 5.2 *Variable aléatoire d'espérance finie*

Si X est une variable aléatoire à valeurs réelles ou complexes, on dit que X est d'espérance finie lorsque la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X : $\boxed{E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).}$

Remarque 5.1

Lorsque X est d'espérance finie avec $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbf{N}\}$, on peut écrire

$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n) = \dfrac{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)}$, donc $E(X)$ est la moyenne pondérée des valeurs prises par X, chaque valeur étant pondérée par la probabilité que X prenne cette valeur.

Exemple 5.2

- Une variable aléatoire constante est d'espérance égale à cette constante.

- Une variable aléatoire discrète suivant une des lois usuelles est d'espérance finie.

Proposition 5.1 *Cas d'une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que $X(\Omega) \subset \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

$$\boxed{E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)}$$

Proposition 5.2 *Positivité de l'espérance*

$$\boxed{\text{Si } X(\Omega) \subset \mathbf{R}^+ \text{ alors } E(X) \geqslant 0.}$$

Proposition 5.3 *Théorème du transfert*

Soit X une variable aléatoire discrète et soit $f : X(\Omega) \longrightarrow \mathbf{K}$ une application, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie **ssi** la famille $(f(x)P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ;

et dans ce cas :

$$\boxed{E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X = x)}$$

Ce qui permet de calculer l'espérance de $f(X)$ à partir de la loi de X, sans connaître celle de $f(X)$.

Corollaire 5.4 *Linéarité*

Soit $X : \Omega \to \mathbf{K}$ et $Y : \Omega \to \mathbf{K}$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$.

Si X et Y sont d'espérance finie alors $X + Y$, λX, $\lambda X + \mu$ et $\lambda X + \mu Y$ sont d'espérance finie avec

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(\lambda X) = \lambda E(X) \qquad E(\lambda X + \mu) = \lambda E(X) + \mu$$

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

Généralisation :

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et sont chacune d'espérance finie alors $\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ est d'espérance finie et $E\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k E(X_k)$.

Definition 5.3 *Variable aléatoire centrée*

Soit $X : \Omega \to \mathbf{K}$.

- On dit que X est une variable aléatoire centrée lorsque X est d'espérance finie avec $E(X) = 0$.
- Si X est d'espérance finie, alors $Y = X - E(X)$ est une variable aléatoire centrée.

Proposition 5.5 *Croissance*

1. Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ deux variables aléatoires d'espérance finie,

Si $X \leqslant Y$ alors $E(X) \leqslant E(Y)$ (*Croissance de l'espérance*)

2. Soit $X : \Omega \to \mathbf{C}$ et $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ deux variables aléatoires.

   Si $|X| \leqslant Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie et $|E(X)| \leqslant E(|X|) \leqslant E(Y)$.

Proposition 5.6 *Espérance du produit de deux variables aléatoires*
Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Si X et Y sont **indépendantes et d'espérance finie**, alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X).E(Y).$$

On peut étendre le résultat au cas de n variables aléatoires indépendantes.

5.2 Variance d'une variable aléatoire discrète et écart-type

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, sont discrètes et à valeurs réelles.

Definition 5.4 *Moment d'ordre k*
Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire discrète.

On dit que X admet un moment d'ordre k, $k \in \mathbf{N}^*$, lorsque X^k est d'espérance finie. Et on appelle moment d'ordre k de X le nombre $E(X^k)$.

Proposition 5.7

Si X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie ainsi que $(X - E(X))^2$.

Proposition 5.8 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et

$$\boxed{E(XY)^2 \leqslant E(X^2).E(Y^2)}$$

Avec égalité si, et seulement si, X et Y sont presque sûrement colinéaires.

Definition 5.5 *Variance et écart-type*

Soit X admettant un moment d'ordre 2.

On appelle

> **variance** de X le réel noté $V(X)$, défini par : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$,
>
> **écart-type** de X le réel noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

De plus :

> $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$ (*Formule de Koenig-Huygens*)

Tableau récapitulatif pour les lois usuelles

Loi	Probabilités	Espérance	Variance
$X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$	$\forall k \in [\![1, n]\!]$ $P(X = k) = \dfrac{1}{n}$	$E(X) = \dfrac{n+1}{2}$	$V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	$P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$V(X) = p(1 - p)$
$X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$\forall k \in [\![0, n]\!]$ $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = np(1 - p)$
$X \sim \mathcal{G}(p)$	$\forall k \in \mathbf{N}^*$ $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$	$E(X) = \dfrac{1}{p}$	$V(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$\forall k \in \mathbf{N}$ $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$

Proposition 5.9

Soit X admettant un moment d'ordre 2.
Si $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ alors

> - aX admet une variance avec $V(aX) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$.
> - $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Definition 5.6 *Variable aléatoire centrée réduite*

Soit X admettant un moment d'ordre 2.

- On dit que X est une variable aléatoire réduite lorsque $V(X) = 1$.

- Si X admet une variance non nulle, alors $Y = \dfrac{1}{\sigma(X)}X$ est une variable aléatoire réduite.

- Si X admet une variance non nulle, alors $Y = \dfrac{X - m}{\sigma}$, où $m = E(X)$ et $\sigma = \sigma(X)$, est une variable aléatoire centrée réduite.

5.3 Covariance de deux variables aléatoires discrètes

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, sont discrètes et à valeurs réelles.

Definition 5.7

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors $(X - E(X)).(Y - E(Y))$ est d'espérance finie et on appelle covariance de X et Y le réel, noté $cov(X, Y)$, défini par

$$\boxed{cov(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

Remarque 5.2 *Covariance de deux variables indépendantes*

$\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes alors } cov(X, Y) = 0.}$

Proposition 5.10 *Lien avec la variance*

Soient X et Y admettant un moment d'ordre 2.

- $V(X) = cov(X, X)$.

- $X + Y$ admet une variance et $\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)}$

- *Généralisation* :

Si $X_1, \ldots, X_n$ admettent chacune une variance, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ admet une variance et :

$$\boxed{V(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Cov(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} Cov(X_i, X_j)}$$

- Cas particulier : Si $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes** alors $V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k)$

6 Inégalités probabilistes

Proposition 6.1 *Inégalité de Markov*

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle discrète.

Si X est à valeurs positive alors

$$\boxed{\forall a > 0, \quad P(X \geqslant a) \leqslant \frac{E(X)}{a} \qquad \textit{Inégalité de Markov}}$$

Proposition 6.2 *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Soit $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle discrète.

Si X admet un moment d'ordre 2 alors

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \qquad \textit{Inégalité de Bieanymé-Techbychev}}$$

Exemple 6.1

On peut appliquer le résultat précédent pour montrer que toute variable aléatoire réelle discrète de variance nulle est presque sûrement constante.

Proposition 6.3 *Loi faible des grands nombres*

Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2, alors,

en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = E(X_1)$

on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

7 Fonction génératrice

Dans ce paragraphe, toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé, sont discrètes et à valeurs dans $\mathbf{N}$.

Quelques remarques :

On suppose connue la loi de X, c'est-à-dire les nombres $P(X = n)$ avec $n \in \mathbf{N}$.

La série entière $\sum P(X = n)t^n$ est de rayon de convergence au moins égal à 1.

De plus les séries $\sum P(X = n)$ et $\sum P(X = n)(-1)^n$convergent.

On en déduit que la fonction $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$ est définie au moins sur $[-1, 1]$.

Definition 7.1 *Fonction génératrice*

On appelle fonction génératrice de X, la fonction notée G_X, définie au moins sur $[-1, 1]$ par :

$$\boxed{G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n = E(t^X)}$$

On aura donc $G_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

Si $X(\Omega)$ est fini, alors G_X est une fonction polynômiale, définie sur $\mathbf{R}$.

Cas des variables aléatoires discrètes de lois usuelles

Loi	Fonction génératrice
$X \sim \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$	$G_X(t) =$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	$G_X(t) =$
$X \sim \mathcal{B}(n, p)$	$G_X(t) =$
$X \sim \mathcal{G}(p)$	$G_X(t) =$
$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$	$G_X(t) =$

Proposition 7.1 *Régularité*

Soit $X : \Omega \to \mathbf{N}$ et G_X sa fonction génératrice définie au moins sur $[-1, 1]$.

- G_X est continue sur $[-1, 1]$.
- G_X est de classe C^∞ au moins sur $]-1, 1[$ avec

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Par conséquent la loi de X est caractérisée par sa fonction génératrice.

- Si X et Y sont telles que $X(\Omega) = Y(\Omega)$ alors,

$$X \sim Y \iff \forall t \in [-1, 1], \quad G_X(t) = G_Y(t)$$

Proposition 7.2 *Fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes*

Si X et Y sont **indépendantes** alors

$$\forall t \in]-1, 1[, \quad G_{X+Y}(t) = G_X(t).G_Y(t)$$

où G_X, G_Y, G_{X+Y} désignent respectivement la fonction génératrice de X, Y et $X + Y$.

Plus généralement : Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes et à valeurs dans $\mathbf{N}$ alors $\forall t \in [-1, 1] \quad G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} G_{X_k}(t)$.

Exemple 7.1 *Application*

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Déterminer la loi de $X + Y$ lorsque :

1. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$.
2. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

Proposition 7.3 *Fonction génératrice, espérance et variance*

- X est d'espérance finie **ssi** sa fonction génératrice G_X est dérivable en 1.

Et dans ce cas, $E(X) = G'_X(1)$.

- X admet un moment d'ordre 2 **ssi** sa fonction génératrice G_X est deux fois dérivable en 1 .

Dans ce cas, $G''_X(1) = E(X(X-1))$

et

$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.