PSI Un corrigé du D.S. n°05 (un vieux sujet Mines-Ponts PSI)

Étant donné un réel μ ($\mu \in \mathbf{R}$), soit (E_μ) l'équation différentielle ci-dessous :

$$(E_\mu) \qquad 16(x^2-x)y'' + (16x-8)y' - \mu y = 0$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, il est admis que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_μ) sur cet intervalle I, est un espace vectoriel $E_\mu(I)$.

Première partie

1 ▷ Intervalles de définition des solutions

On sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux de la forme : $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ avec a,b des fonctions continues sur un intervalle I est un espace vectoriel de dimension deux.

$$\boxed{\text{On note } I_1 =]-\infty, 0[,\ I_2 =]0,1[\text{ et } I_3 =]1,+\infty[}$$

Sur chacun de ces intervalles, l'équation (E_μ) devient

$$y'' + a(x)y' + b(x) = 0 \text{ avec } a(x) = \frac{16x-8}{16x(x-1)} \text{ et } b(x) = \frac{-\mu}{16x(x-1)}$$

Les fonctions a et b étant continues sur I_1, I_2, I_3 par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, les espaces vectoriels $E_\mu(I_1)$, $E_\mu(I_2)$ et $E_\mu(I_3)$ sont de dimension 2 avec I_1, I_2, I_3 disjoints les plus grands possibles.

2 ▷ Solutions de (E_μ) développables en série entière dans un intervalle de centre 0

Soit y une fonction inconnue, égale à la somme d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, de rayon de convergence R supposé strictement positif :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(a) On sait que y est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ avec ses dérivées qui s'obtiennent par dérivation terme à terme

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \quad (k=n-1)$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (k+1) k a_{k+1} x^{k-1} \quad (k=n-1)$$

On en déduit que pour $x \in]-R,R[$

$$\begin{aligned}
16(x^2-x)y''(x) &= 16x^2y''(x) - 16xy''(x) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n \\
&= 16\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - 16\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n \\
16(x^2-x)y''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(16n(n-1)a_n - 16n(n+1)a_{n+1}\right)x^n
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
(16x-8)y'(x) &= 16xy'(x) - 8y'(x) \\
&= 16\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - 8\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\
&= 16\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n - 8\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\
(16x-8)y'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(16na_n - 8(n+1)a_{n+1}\right)x^n
\end{aligned}$$

Par conséquent $16(x^2-x)y''(x) + (16x-8)y'(x) - \mu y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec

$$\begin{aligned}
b_n &= 16n(n-1)a_n - 16n(n+1)a_{n+1} + 16na_n - 8(n+1)a_{n+1} - \mu a_n \\
b_n &= (16n^2-\mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on obtient :

$$16(x^2-x)y''(x) + (16x-8)y'(x) - \mu y(x) = 0 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = 0 \iff \forall n \in \mathbf{N} \quad b_n = 0$$

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E_\mu) \text{ sur }]-R,R[\text{ si et seulement si } \forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+1} = \frac{16n^2-\mu}{8(n+1)(2n+1)}a_n}$$

On peut aussi écrire $a_{n+1} = \dfrac{16n^2-\mu}{4(2n+2)(2n+1)}a_n \quad (*)$.

Au brouillon *pour obtenir la conjecture de la formule de a_n, on écrit :*

$$a_n = \frac{16(n-1)^2-\mu}{4(2n)(2n-1)}a_{n-1} = \frac{16(n-1)^2-\mu}{4(2n)(2n-1)} \times \frac{16(n-2)^2-\mu}{4(2n-2)(2n-3)}a_{n-2}$$

En continuant ainsi, a-priori, on finit avec le dernier terme en a_0 comme suit :

$$a_n = \frac{16(n-1)^2-\mu}{4(2n)(2n-1)} \times \frac{16(n-2)^2-\mu}{4(2n-2)(2n-3)} \cdots \frac{16\times 0^2-\mu}{4\times(2\times 1)}a_0$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \dfrac{a_0}{4^n(2n)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)$:

Par la relation $(*)$, on sait que $a_1 = \dfrac{16\times 0^2-\mu}{4\times 2\times(2\times 0+1)}a_0 = \dfrac{16\times 0^2-\mu}{2^3}a_0$, or $4^1.(2\times 1)! = 2^3$, donc $a_n = \dfrac{a_0}{4^n(2n)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)$ est vraie pour $n=1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $a_n = \dfrac{a_0}{4^n(2n)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)$. On obtient alors

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{16n^2-\mu}{4(2n+2)(2n+1)}a_n \\
&= \frac{16n^2-\mu}{4(2n+2)+1)(2n+1)} \times \frac{a_0}{4^n(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu) \\
&= \frac{a_0}{4^{n+1}(2n+2)(2n+1)(2n)!}\prod_{k=0}^{n}(16k^2-\mu) \\
a_{n+1} &= \frac{a_0}{4^{n+1}(2n+2)!}\prod_{k=0}^{(n+1)-1}(16k^2-\mu)
\end{aligned}$$

Ce qui était la relation attendue.

$$\boxed{\text{Or } 4 = 2^2 \text{ donc : } \forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \frac{a_0}{2^{2n}(2n)!}\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}$$

(b) Le réel a_0 est supposé différent de 0.

• Si $\forall k \in \mathbf{N} \quad \mu \neq 16k^2$ alors par la formule précédente $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n \neq 0$ et on peut appliquer la règle de d'Alembert pour trouver le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ avec la relation $a_{n+1} = \dfrac{16n^2-\mu}{4(2n+2)(2n+1)}a_n$:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{16n^2-\mu}{4(2n+2)(2n+1)} = \frac{16n^2-\mu}{16n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Alors $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

• S'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\mu = 16p^2$ alors $\forall n \geq p+1 \quad a_n = 0$, et donc la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout réel x avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n$ (polynôme). Dans ce cas $R = +\infty$.

Si $\mu = 0$ alors $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = 0$.

Si $\mu = 16p^2$ avec $p \in \mathbf{N}^*$ alors $\forall n \in [\![1, p]\!] \quad a_n = \dfrac{a_0}{2^{2n}(2n)!} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - 16p^2)$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{16^n a_0}{2^{2n}(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (k-p)(k+p) \\
&= \frac{2^{2n} a_0}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (k+p) \times \prod_{k=0}^{n-1} (k-p) \\
&\quad \text{par les changements d'indices } i = k+p \text{ et } j = p-k \\
&= \frac{2^{2n} a_0}{(2n)!} \prod_{i=p}^{n-1+p} i \times \prod_{j=p-n+1}^{p} (-j) \\
&= \frac{(-4)^n a_0}{(2n)!} \times \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} \times \frac{p!}{(p-n)!} \\
a_n &= (-4)^n a_0 \times \frac{p}{p+n} \times \frac{(p+n)!}{(2n)!(p-n)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Et finalement } \forall n \in [\![1, p]\!] \quad a_n = \frac{(-4)^n p}{n+p} \binom{p+n}{p-n} a_0.}$$

Dans les questions 3) et 4) les réels a_0 et μ sont égaux à 1 : $a_0 = 1, \quad \mu = 1$.

Soit φ la fonction définie au moins sur l'intervalle $]-R, R[$ par la relation :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

3 ▷ <u>Étude de la fonction φ</u>

(a) $\mu = 1$ donc $\forall k \in \mathbf{N}^2 \quad \mu \neq 16k^2$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc $R = 1$.

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N} \quad a_n = \dfrac{-1}{2^{4n}(4n-1)}\dbinom{4n}{2n}$.

- $\dfrac{-1}{2^{4\times 0}(4\times 0 - 1)}\dbinom{4\times 0}{2\times 0} = 1 = a_0$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $a_n = \dfrac{-1}{2^{4n}(4n-1)}\dbinom{4n}{2n}$.

On sait que $a_{n+1} = \dfrac{16n^2 - \mu}{2^2(2n+2)(2n+1)}a_n$, alors

$$a_{n+1} = \frac{(4n-1)(4n+1)}{4(2n+2)(2n+1)} \times \frac{-1}{2^{4n}(4n-1)}\binom{4n}{2n} = -\frac{(4n+1)(4n)!}{2^{4n+2}(2n+2)(2n+1)(2n)!(2n)!}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= -\frac{(4n+1)!}{2^{4n+2}(2n+2)!(2n)!} \\
&= -\frac{(4n+4)!}{2^{4n+2}(2n+2)!(2n)!(4n+2)(4n+3)(4n+4)} \\
&= -\frac{(4n+4)!}{2^{4n+4}(2n+2)!(2n)!(2n+1)(2n+2)(4n+3)} \\
&= -\frac{(4n+4)!}{2^{4n+4)}(4n+3)(2n+2)!(2n+2)!} \\
a_{n+1} &= \frac{-1}{2^{4(n+1)}(4(n+1)-1)}\binom{4(n+1)}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

Ce qui termine la récurrence.

D'après la formule de stirling, on sait que $(4n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{4n}{\mathbf{e}}\right)^{4n}\sqrt{2\pi\times 4n}$ et $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{2n}{\mathbf{e}}\right)^{2n}\sqrt{2\pi\times 2n}$, alors avec $a_n = -\dfrac{(4n)!}{2^{4n}(4n-1)(2n)!(2n)!}$ on a :

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2^{4n}\times 4n} \times \left(\frac{4n}{\mathbf{e}}\right)^{4n}\sqrt{2\pi\times 4n} \times \left(\frac{\mathbf{e}}{2n}\right)^{4n}\frac{1}{2\pi\times 2n}$$

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n\sqrt{4n}\sqrt{2\pi}}$$

On en déduit que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^\alpha}$ avec $k = \dfrac{-1}{4\sqrt{2\pi}}$ et $\alpha = \dfrac{3}{2}$.

(b) φ est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons f_n la fonction continue $x \mapsto a_n x^n$.

$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in [-1,1] \quad |f_n(x)| \leqslant |a_n|$ alors $\|f_n\|_\infty^{[-R,R]} \leqslant |a_n|$ avec $\|f_n\|_\infty^{[-R,R]} = \underset{x\in[-R,R]}{Sup} |f_n(x)|$.

D'après l'équivalent trouvé précédemment, on a : $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} \times \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, par comparaison avec le terme général d'une série de Riemann on obtient la convergence de la série à termes positifs $\sum |a_n|$ et donc la convergence normale donc uniforme sur $[-R,R]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

$$\boxed{\text{Par théorème de continuité, } \varphi = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [-R,R] = [-1,1].}$$

(c) • En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$, on sait que φ est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert $]-R,R[=]-1,1[$ avec

$$\forall x \in]-R,R[\quad \varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

• Pour $x \in]-R,0]$, on peut écrire $x = -|x|$ et alors $\varphi'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = (-1)^{n-1} a_n |x^{n-1}|$.

Pour obtenir la limite à droite en $-R = -1$ de φ', on va appliquer le théorème de la double limite.

•• $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \displaystyle\lim_{x\to-1} u_n(x) = (-1)^{n-1} n a_n \in \mathbf{R}$.

•• Montrons que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq1} u_n$ converge uniformément sur $]-1,0]$:

On sait que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \dfrac{-1}{2^{4n}(4n-1)}\dbinom{4n}{2n} < 0$, alors la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée.

D'après l'équivalent trouvé en question 3(a), on a pour $x \neq 0$:

$$|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{|k|}{(n)^{3/2}} \times |x|^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{\sqrt{n}}|x|^{n-1}$$

Alors pour $x \in]-R,0] =]-1,0]$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = 0$.

$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \forall x \in]-R,0]$, puisque $a_{n+1} = \dfrac{16n^2-1}{8(n+1)(2n+1)} a_n$:

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| &= |(n+1)a_{n+1}x^n| - |na_nx^{n-1}| \\
&= |a_nx^{n-1}|\left(\frac{16n^2-1}{8(2n+1)}|x| - n\right) \\
&= \frac{|a_nx^{n-1}|}{8(2n+1)}\left((16n^2-1)|x| - (16n^2+8n)\right) \\
|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| &= \frac{|a_nx^{n-1}|}{8(2n+1)}\left(16n^2(|x|-1) - |x| - 8n\right)
\end{aligned}$$

Et puisque $0 \leq |x| < 1$ on obtient

$$|u_{n+1}(x)| - |u_n(x)| \leq 0$$

La série alternée $\sum u_n(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in]-1,0]$, alors on sait que

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)|$$

Or $\forall x \in]-1,0] \quad |u_{n+1}(x)| = |(n+1)a_{n+1}x^n| \leqslant (n+1)|a_{n+1}|$, alors

$$\forall x \in]-1,0] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leqslant (n+1)|a_{n+1}|$$

En notant $R_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$, on obtient

$$\|R_n\|_\infty^{]-R,0]} = \underset{x\in]-1,0]}{Sup} |R_n(x)| \leqslant (n+1)|a_{n+1}|$$

Or avec l'équivalent de la question 3(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty^{]-1,0]} = 0$.

On a ainsi obtenu la convergence uniforme sur $]-1,0]$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

Par théorème de la double limite, $\varphi' : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}$ admet une limite finie à droite en $-R = -1$ qui vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(-1)^{n-1}$

La fonction φ est continue sur le segment $[-R,R]$, de classe C^1 sur $]-R,R[$ et sa dérivée φ' admet une limite finie à droite en $-R$ alors par théorème de la limite de la dérivée, φ est de classe C^1 sur $[-R,R[$.

4 ▷ Étude de la dérivée φ' lorsque le réel x tend vers 1

(a) **Un résultat préparatoire** : soit une suite réelle positive $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série entière $\sum b_n x^n$ ait un rayon de convergence égal à 1. Soit $g(x)$ la somme de cette série : $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On suppose que la fonction g est majorée sur $[0,1[$, il existe donc $M > 0$ tel que $\forall x \in [0,1[\quad g(x) \leqslant M$.

• Par hypothèse $\forall n \in \mathbf{N} \quad b_n \geqslant 0$, alors la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n\right)_{N\in\mathbf{N}}$ de la série $\sum b_n$ est croissante.

• Montrons que la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n\right)_{N\in\mathbf{N}}$ est majorée :

$\forall n \in \mathbf{N} \quad \lim\limits_{x\to 1} b_n x^n = b_n$, alors par somme finie

$$\forall N \in \mathbf{N} \quad \sum_{n=0}^{N} b_n = \lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{N} b_n x^n$$

De plus $\forall x \in [0,1[\quad b_n x^n \geqslant 0$ alors

$$\forall N \in \mathbf{N} \quad \forall x \in [0,1[\quad \sum_{n=0}^{N} b_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \leqslant M$$

On a donc $\forall N \in \mathbf{N} \quad \forall x \in [0,1[\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{N} b_n x^n \leqslant M$ et par passage à la limite sur une inégalité

$$\forall N \in \mathbf{N} \quad \sum_{n=0}^{N} b_n \leqslant M$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum b_n$ étant croissante et majorée, elle converge. $\boxed{\text{La série } \sum b_n \text{ est donc convergente.}}$

(b) • $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad a_n = \dfrac{-1}{2^{4n}(4n-1)}\dbinom{4n}{2n} < 0$.

On a vu en question 3(a) : $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{n^{3/2}}$ avec $k = \dfrac{-1}{4\sqrt{2\pi}}$, donc $na_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{\sqrt{n}}$.

$\dfrac{1}{2} \leqslant 1$ donc la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, par comparaison la série à termes négatifs $\boxed{\sum na_n \text{ diverge.}}$

- On a $a_n < 0$ et la fonction $x \mapsto x^{n-1}$ est croissante sur $[0,1[$, alors la fonction $\varphi' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ est décroissante sur $[0,1[$.
  φ' admet donc une limite en 1 qui vaut $-\infty$ ou qui est finie.

  Supposons que cette limite soit finie, φ' est alors minorée et donc $-\varphi'$ est majorée.

  En appliquant le résultat préparatoire à la série $\sum b_n$ avec $b_n = -na_n$, on obtient la convergence de la série $\sum b_n$, ce qui est en contradiction avec $\sum na_n$ diverge.

  Par un raisonnement par l'absurde on a obtenu : $\lim_{x\to 1} \varphi'(x) = -\infty$.

Deuxième partie

Dans cette partie le réel μ est égal à 1 ; le but est de résoudre l'équation différentielle (E_1) sur l'intervalle $I =]0,1[$. Il pourra être utile de poser :

$$E_1(y)(x) = 16(x^2 - x)y''(x) + (16x - 8)y'(x) - y(x)$$

Soit θ la fonction $t \mapsto x = \frac{1}{2}(1 + \cos(t))$, définie sur l'intervalle $]0,\pi[$.

5 ▷ La fonction cosinus est une bijection de classe C^∞ de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$, alors la fonction θ est une bijection de classe C^∞ de $]0,\pi[$ sur $]0,1[$ avec $\forall t \in]0,\pi[\quad \theta'(t) = -\frac{\sin(t)}{2} \neq 0$.

On en déduit que y est une fonction dérivable deux fois sur $]0,1[$ si et seulement si la fonction $z = y \circ \theta$ est deux fois dérivable sur $]0,\pi[$ ($y = z \circ \theta^{-1}$).

$$\forall t \in]0,\pi[, \quad z'(t) = \theta'(t)y'(\theta(t)) = -\frac{\sin(t)}{2}y'(\theta(t)) \quad z''(t) = -\frac{\cos(t)}{2}y'(\theta(t)) + \left(-\frac{\sin(t)}{2}\right)^2 y''(\theta(t))$$

Ce qui donne $z''(t) = \frac{\sin^2(t)}{4}y''(\theta(t)) - \frac{\cos(t)}{2}y'(\theta(t))$.

Avec $x = \frac{1+\cos(t)}{2}$, on a :

$$16(x^2 - x) = 16x(x-1) = 16 \times \frac{1+\cos(t)}{2} \times \frac{\cos(t)-1}{2} = 16 \times \frac{\cos^2(t)-1}{4} = -16\frac{\sin^2(t)}{4}$$

$$16x - 8 = 8(1 + \cos(t)) - 8 = 8\cos(t)$$

Alors $16x(x-1)y''(x) + (16x-8)y'(x) - y(x) = -16z''(t) - z(t)$

$$E_1(y)(x) = 0 \Longleftrightarrow 16z''(t) + z(t) = 0$$

$$\boxed{y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur }]0,1[\text{ si et seulement si } z = y \circ \theta \text{ est solution sur }]0,\pi[\text{ de } 16z'' + z = 0.}$$

6 $\triangleright$ L'équation différentielle (F) $\quad 16z'' + z = 0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $16r^2+1 = 0$. Cette équation caractéristique admet les deux solutions complexes conjuguées $-\dfrac{i}{4}$ et $\dfrac{i}{4}$, alors on sait que les solutions de (F) sur $]0,\pi[$ sont les fonctions $z : t \mapsto \alpha \cos\left(\dfrac{t}{4}\right) + \beta \sin\left(\dfrac{t}{4}\right)$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

On déduit de la question 5 et des égalités données par l'énoncé, que les solutions de (E_1) sur $]0,1[$ sont les fonctions $y : x \mapsto \alpha\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}} + \beta\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

Les fonctions $y_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}}$ et $y_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}}$ ne sont clairement pas colinéaires et, d'après ce qui précède, elles forment une famille génératrice de l'ensemble des solutions de (E_1) sur l'intervalle I.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle } (E_1) \text{ dans l'intervalle } I \\ \text{est la famille } (y_1, y_2) \text{ avec } y_1 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}} \text{ et } y_2 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}}\ .\end{array}}$$

7 $\triangleright$ D'après les questions 3 et 4, on sait que φ est une solution de (E_1) sur $[0,1[$ avec $\varphi(0) = \lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = a_0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \varphi'(x) = \varphi'(0) = a_1 \in \mathbf{R}$.

Il existe donc deux réels α et β tels que $\forall x \in]0,1[\quad \varphi(x) = \alpha\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x}} + \beta\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{x}}$.

En faisant tendre x vers 0 on obtient $\dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} + \dfrac{\beta}{\sqrt{2}} = \varphi(0) = 1$.

Par dérivation $\forall x \in]0,1[\quad \varphi'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2x}}\left(\dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} - \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\sqrt{x}}}\right)$.
Si $\alpha - \beta \neq 0$ alors la limite en 0 n'est pas finie, on en déduit que $\alpha - \beta = 0$.

Les réels α et β vérifient le système $\begin{cases} \alpha + \beta = \sqrt{2} \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases}$ donc $\alpha = \beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \forall x \in]0,1[\quad \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}} + \sqrt{1-\sqrt{x}}\right).}$$

Troisième partie

Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles, définies et de classe C^∞ sur l'intervalle $\overline{I} = [0,1]$. Soit D l'endomorphisme de $\mathcal{C}$ qui fait correspondre à une fonction f son image $D(f)$ définie par la relation :

$$D(f) : x \mapsto 16(x^2 - x)f''(x) + (16x - 8)f'(x)$$

8 $\triangleright$ L'espace préhilbertien réel $(\mathcal{C}, (.|.))$

Étant donné deux fonctions f et g appartenant à l'espace vectoriel $\mathcal{C}$, la fonction $h : x \mapsto \dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur l'intervalle I par produit et quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

De plus f et g sont continue sur le segment $\bar{I} = [0,1]$, alors elles y sont bornées et leur produit est borné, il existe donc $M > 0$ tel que

$$\forall x \in]0,1[\quad |h(x)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{x(1-x)}}$$

La fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0,1[$ avec

$$\psi(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } \psi(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$\dfrac{1}{2} < 1$ alors d'après les intégrales de Riemann généralisées la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable en 0 et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est intégrable en 1. Par comparaisons la fonction ψ est intégrable sur $]0,1[$ ainsi que la fonction h.

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ est intégrable sur } I =]0,1[.}$$

1ère remarque : On peut être tenté d'écrire $\dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{f(0)g(0)}{\sqrt{x}}$ puisque f et g sont continues en 0, mais on ne peut pas écrire cet équivalent lorsque $f(0) = 0$ ou $g(0) = 0$! De même pour l'équivalent au voisinage de 1.

2nde remarque : Si on sait ce que donne une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur un intervalle I, on ne sait absolument rien sur le produit ou le quotient de telles fonctions !!!

Par convention : pour deux fonctions f et g de l'espace $\mathcal{C}$, le symbole $(f|g)$ désigne la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

Il est admis dans la suite que l'application $(f,g) \mapsto (f|g)$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$ est un produit scalaire. Ainsi $\mathcal{C}$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien réel.

9 ▷ Une propriété de l'endomorphisme D

Pour f et g dans $\mathcal{C}$, on fournit : $D(f)(x) = -16u'(x)\sqrt{x-x^2}$ avec $u(x) = f'(x)\sqrt{x-x^2}$ alors :

$$(D(f)|g) = \int_0^1 \frac{D(f)(x)g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x = -16\int_0^1 u'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

Les fonctions u et g sont de classe C^1 sur $]0,1[$ avec $\lim_{x\to 0} u(x)g(x) = 0 = \lim_{x\to 1} u(x)g(x)$, alors par intégration par parties on obtient :

$$(D(f)|g) = -16\left[u(x)g(x)\right]_0^1 + 16\int_0^1 u(x)g'(x)\mathrm{d}x = 16\int_0^1 f'(x)g'(x)\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

Et par symétrie $(f|D(g)) = (D(g)|f) = 16\displaystyle\int_0^1 g'(x)f'(x)\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x = (D(f)|g)$.

$$\boxed{\text{On a donc pour } f \text{ et } g \text{ dans } \mathcal{C},\ (D(f)|g) = (f|D(g)) = 16\int_0^1 f'(x)g'(x)\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x}$$

10 ▷ Valeurs propres et sous-espaces propres

(a) Soit λ une valeur propre de l'endomorphisme D. Soit f un vecteur propre de D associé à cette valeur propre λ alors $D(f) = \lambda f$ et avec l'égalité vue en question 9 on a :

$$(D(f)|f) = (\lambda f|f) = \lambda(f|f) \text{ et } (D(f)|f) = 16\int_0^1 f'(x)f'(x)\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto (f'(x))^2\sqrt{x(1-x)}$ est positive et intégrable sur $]0,1[$ alors $\displaystyle\int_0^1 f'(x)f'(x)\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x \geqslant 0$, ce qui donne $\lambda(f|f) \geqslant 0$.

$f \neq 0$ puisque f est un vecteur propre alors $(f|f) > 0$ et donc $\boxed{\lambda \geq 0.}$

(b) Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes,on note G_λ et G_μ les sous-espaces propres associés.

Soit $f \in G_\lambda$ et $g \in G_\mu$, on a :

$$\lambda(f|g) = (\lambda f|g) = (D(f)|g) = (f|D(g)) = (f|\mu g) = \mu(f|g)$$

On en déduit que $(\lambda - \mu)(f|g) = 0$, or $\lambda \neq \mu$ donc $(f|g) = 0$.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres } G_\lambda \text{ et } G_\mu \text{ sont orthogonaux dans l'espace préhilbertien réel } \mathcal{C}.}$$

11 ▷ Noyau et image de l'endomorphisme D

(a) 1ère méthode :

Si f est un élément du noyau de D alors $D(f) = 0$ et avec le résultat vu dans la preuve de la question 9 :

$$(D(f)|f) = 0 = 16\int_0^1 (f'(x))^2\sqrt{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto (f'(x))^2\sqrt{x(1-x)}$ étant continue et positive sur $]0,1[$, on obtient $\forall x \in]0,1[\quad (f'(x))^2\sqrt{x(1-x)} = 0$ et donc $\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = 0$.

Si f est dans le noyau de D alors f est constante sur $[0,1]$ (f est continue).

Réciproquement on obtient par définition de $D(f)$ que si f est constante alors $D(f) = 0$.

2nde méthode :

Par définition le noyau de D est $\{f \in \mathcal{C}, \quad D(f) = 0\}$.

Soit $f \in \mathcal{C}$, alors f est de classe C^∞ sur $[0,1]$ et

$$\forall x \in [0,1] \quad D(f)(x) = 16(x^2 - x)f''(x) + (16x - 8)f'(x) = 0$$

On a donc

$$D(f) = 0 \iff f' \text{ est de classe } C^\infty, \quad f'(0) = 0 = f'(1) \text{ et } \forall x \in]0,1[\quad f''(x) + \frac{2x-1}{2(x^2-x)}f'(x) = 0$$

$D(f) = 0 \iff f'$ vérifie sur $]0,1[$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre homogène $y' + a(x)y = 0$ avec $a(x) = \dfrac{2x-1}{2(x^2-x)} = \dfrac{u'(x)}{2u(x)}$ et f' est de classe C^∞ sur $[0,1]$ avec $f'(0) = 0 = f'(1)$.

On en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R} \quad \forall x \in]0,1[\quad f'(x) = \alpha e^{-A(x)}$ avec A une primitive de a, ce qui donne $\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = \alpha e^{-\frac{1}{2}\ln|x^2-x|} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x(1-x)}}$. Par continuité de f' en 0 et en 1, avec $f'(0) = f'(1) = 0$ il vient $\alpha = 0$ et donc f est une fonction constante.

Réciproquement si f est constante alors $D(f) = 0$.

3ème méthode :

Avec l'indication écrite en question 9, on sait que pour $f \in \mathcal{C}$, $D(f)(x) = -16u'(x)\sqrt{x-x^2}$ avec $u(x) = f'(x)\sqrt{x-x^2}$.

On a donc $D(f) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in]0,1[\quad u'(x) = 0 \Longleftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall x \in]0,1[\quad u(x) = \alpha$.

On retombe sur $f'(x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x-x^2}}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$ plus rapidement que dans la méthode précédente et par continuité de f' en 0 et en 1 on a $\alpha = 0$.

$$\boxed{\text{Le noyau de } D \text{ est donc l'ensemble des fonctions constantes sur } [0,1].}$$

(b) Soit h un élément de l'espace image de D, alors il existe $f \in \mathcal{C}$ telle que $h = D(f)$, et

$$(h|1) = (D(f)|1) = (f|D(1)) = (f|0) = 0$$

$$\boxed{\text{Toute fonction } h \text{ de l'image de } D \text{ est orthogonale à la fonction constante égale à 1 : } (h|1) = 0.}$$

12 ▷ Dimension d'un sous-espace propre G_μ associé à une valeur propre μ

Soit μ une valeur propre de l'endomorphisme D, G_μ le sous-espace propre associé.

(a) $f \in G_\lambda$ si et seulement si $f \in \mathcal{C}$ et $D(f) - \mu f = 0$, ce qui donne $f \in \mathcal{C}$ et f vérifie l'équation différentielle (E_μ) sur $\bar{I} = [0,1]$. On en déduit que G_μ est inclus dans $E_\mu(I)$, espace vectoriel des solutions de (E_μ) sur $I =]0,1[$.

Par le résultat de la question 1, on sait que $dimE_\mu(I) = 2$ donc $\boxed{dimG_\mu \leqslant 2.}$

(b) Étant données deux fonctions y_1 et y_2 appartenant à G_μ, soit $W : x \mapsto det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$.

Par définition $\forall x \in [0,1] \quad W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$, donc W est de classe C^∞sur $[0,1]$ par produit et combinaison linéaire de fonctions de classe C^∞ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1] \quad W'(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) \\ \forall x \in [0,1] \quad W'(x) &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} 16(x^2-x)W'(x) &= y_1(x)\left(\mu y_2(x) - (16x-8)y_2'(x)\right) - \left(\mu y_1(x) - (16x-8)y_1'(x)\right)y_2(x) \\ 16(x^2-x)W'(x) &= -(16x-8)W(x) \end{aligned}$$

La fonction W est donc solution sur $]0,1[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $h' + a(x)h = 0$ avec $a : x \mapsto \dfrac{2x-1}{2(x^2-x)}$ qui est continue sur $]0,1[$.
On sait alors qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in]0,1[\quad W(x) = \alpha \exp(-A(x))$ avec A une primitive de la fonction a sur $]0,1[$.

Il existe donc $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in]0,1[\quad W(x) = \alpha e^{-\frac{1}{2}\ln|x^2-x|} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{x(1-x)}}$. La fonction W étant de classe C^∞ sur $[0,1]$, on a $\alpha = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement } W : x \mapsto det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \text{ est la fonction nulle.}}$$

Supposons que la fonction y_2 ne soit pas la fonction nulle alors $\forall x \in [0,1] \quad \exists \alpha(x) \in \mathbf{R}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \end{pmatrix} = \alpha(x) \begin{pmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix}$. La fonction α ainsi définie est alors dérivable sur un intervalle non vide inclus dans $[0,1]$ sur lequel la fonction y_2 ne s'annule pas or $y_1(x) = \alpha(x)y_2(x)$ et $y_1'(x) = \alpha(x)y_2'(x)$ donc $\alpha'(x) = 0$ et la fonction α est constante.

Donc : $\exists \alpha \in \mathbf{R} \quad \forall x \in [0,1] \quad y_1(x) = \alpha y_2(x)$.

Finalement pour tout couple (y_1, y_2) d'éléments de G_μ, la famille (y_1, y_2) est liée.
On en déduit que G_μ est de dimension strictement inférieure à 2, or G_μ est un sous-espace propre donc $\boxed{G_\mu \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension 1.}}$

13 $\triangleright$ Élements propres de l'application Δ

Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ des restrictions des fonctions polynomiales à l'intervalle $\bar{I}$.

(a) On sait que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel stable par dérivation, donc si P est un élément de $\mathcal{P}$ alors P' et P'' sont dans $\mathcal{P}$, de plus $\mathcal{P}$ est aussi stable par produit et les fonctions $x \mapsto 16(x^2-x)$ et $x \mapsto 16x - 8$ sont dans $\mathcal{P}$ alors par produit et combinaison linéaire, $D(P) \in \mathcal{P}$.

$$\boxed{\mathcal{P} \text{ est bien stable par } D.}$$

On note Δ l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ induit par D.

(b) • $\mu \in \mathbf{R}$ est une valeur propre de Δ si et seulement si il existe $f \in \mathcal{P}$, $f \neq 0$, telle que $\Delta(f) = D(f) = \mu f$, ce qui revient à $f \in \mathcal{P}$, $f \neq 0$ et f est solution de l'équation différentielle (E_μ).

On a vu en question 2(b) que les solutions non nulles de (E_μ) sont des fonctions polynômiales si et seulement si $\exists q \in \mathbf{N}$ tel que $\mu = 16q^2$.

On en déduit que la suite croissante $(\lambda_q)_{q\in\mathbf{N}}$ des valeurs propres de l'endomorphisme Δ est $\boxed{\text{la suite } (16q^2)_{q\in\mathbf{N}}.}$

• Pour $q \in \mathbf{N}$, on sait par la question 12(b) que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_q = 16q^2$ est de dimension égale à 1. Par le résultat de la question 3(b) c'est l'ensemble $\left\{ \sum_{n=0}^{q} a_n x^n, \quad a_n = \dfrac{(-4)^n q}{n+q} \dbinom{n+q}{q-n} a_0 \text{ avec } a_0 \in \mathbf{R} \right\}$.

• Avec les résultats de la question 2(b) la fonction polynomiale T_q vérifiant (E_{16q^2}) avec $T_q(0) = a_0 = 1$ est $\boxed{T_q : x \mapsto \sum_{n=0}^{q} a_n x^n \text{ avec } a_n = \dfrac{(-4)^n q}{n+q} \dbinom{n+q}{q-n} \text{ et } T_q \text{ est de degré } q.}$

(c) Par le résultat de la question 11(b), on sait que l'espace image de l'application Δ est inclus dans l'espace vectoriel des éléments h de $\mathcal{P}$ qui vérifient $(h|1) = 0$.

Réciproquement, on considère $h \in \mathcal{P}$ une fonction polynômiale non nulle qui vérifie $(h|1) = 0$. Notons p le degré de h.

La famille $(T_q)_{q\in[\![0,p]\!]}$ est une famille de polynômes échelonnée en degré, alors elle est libre et c'est une base de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à p.
On en déduit qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_p) \in \mathbf{R}^{p+1}$ tel que $h = \sum_{q=0}^{p} \alpha_q T_q$ et alors

$$(h|1) = \sum_{q=0}^{p} \alpha_q (T_q|1).$$

Pour $q \neq 0 \quad (T_q|1) = \dfrac{1}{16q^2}(\Delta(T_q)|1) = \dfrac{1}{16q^2}(D(T_q)|1) = \dfrac{1}{16q^2}(T_q|D)(1) = 0$. On en déduit que $0 = (h|1) = \alpha_0$ et $h = \sum_{q=1}^{p} \alpha_q T_q = \sum_{q=1}^{p} \dfrac{\alpha_q}{16q^2} \Delta(T_q)$ est dans $Im(\Delta)$.

$\boxed{\text{L'image de } \Delta \text{ est l'ensemble des fonctions } h \text{ de } \mathcal{P} \text{ qui vérifient } (h|1).}$

14 ▷ Valeurs propres de l'endomorphisme D

On admet que pour toute fonction f de $\mathcal{C}$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge uniformément vers f sur l'intervalle $\bar{I} = [0, 1]$.

(a) Soit g une fonction de $\mathcal{C}$ supposée orthogonale au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$.
D'après le résultat admis ci-dessus il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge uniformément vers f sur l'intervalle $\bar{I} = [0,1]$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g - P_n\|_\infty = 0$ avec $\|g - P_n\|_\infty = \mathop{Sup}\limits_{x\in[0,1]} |g(x) - P_n(x)|$.

On veut montrer que g est nulle, on va montrer que $(g|g) = 0$:

On sait que $\forall n \in \mathbf{N} \quad (g|P_n)$, alors

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad (g|g) = (g|g - P_n + P_n) = (g|g - P_n) + (g|P_n) = (g|g - P_n)$$

Par inégalité triangulaire, les intégrales étant convergentes, on a :

$$0 \leqslant (g|g) \leqslant \int_0^1 \frac{|g(x)|}{\sqrt{x - x^2}} |g(x) - P_n(x)| \,\mathrm{d}x$$

Or $\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad |g(x) - P_n(x)| \leqslant \|g - P_n|_\infty$, donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall x \in]0,1[\quad \frac{|g(x)|}{\sqrt{x - x^2}} |g(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{|g(x)|}{\sqrt{x - x^2}} \|g(x) - P_n(x)\|_\infty$$

Par croissance de l'intégrale et linéarité, puisque les intégrales convergent on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad 0 \leqslant (g|g) \leqslant \|g - P_n\|_\infty \int_0^1 \frac{|g(x)|}{\sqrt{x - x^2}} \mathrm{d}x$$

Par théorème d'encadrement puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g - P_n\|_\infty = 0$, on obtient :
$\lim\limits_{n\to+\infty} (g|g) = 0$, ce qui donne

$$(g|g) = 0$$

et par le caractère défini-positif du produit scalaire on a $g = 0$.

$$\boxed{\text{On a donc prouvé que si } g \in \mathcal{C} \text{ est orthogonale à } \mathcal{P} \text{ alors } g \text{ est la fonction nulle.}}$$

(b) • On sait par le résultat de la question 13(b) que les réels $\lambda_q = 16q^2$ avec $q \in \mathbf{N}$ sont des valeurs propres de Δ donc de D.

• Suppposons qu'il existe une autre valeur propre μ de D, alors G_μ le sous-espace propre de D associé à μ est, par définition, inclus dans $\mathcal{C}$ et, par la question 10(b), G_μ est orthogonal aux sous-espaces propres G_q associés aux valeurs propres $\lambda_q = 16q^2$ pour $q \in \mathbf{N}$.

$G_\mu \neq \{0\}$ par définition de sous-espace propre, il existe donc $g \in G_\mu$ telle que $g \neq 0$.
On a vu en question 13(b) que $G_q = Vect(T_q)$, alors g et T_q sont orthogonaux pour tout q dans $\mathbf{N}$:

$$\forall q \in \mathbf{N} \quad (g|T_q) = 0$$

On sait aussi que $\forall q \in \mathbf{N} \quad T_q$ est de degré q, alors la famille $(T_q)_{q\in\mathbf{N}}$ est une famille de fonctions polynômiales échelonnées en degré qui engendre toutes les fonctions polynômiales donc $\mathcal{P} = Vect(T_q, q \in \mathbf{N})$.

On en déduit que g est une fonction de $\mathcal{C}$ qui est orthogonale au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$. Le résultat de la question 14(a) entraine $g = 0$ ce qui est absurde.

On en déduit que D n'a pas d'autres valeurs propres que les réels $\lambda_q = 16q^2$ avec $q \in \mathbf{N}$.

Les valeurs propres de D sont exactement les réels $16q^2$ avec $q \in \mathbf{N}$.

FIN DU PROBLÈME