

1 Exercice :

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Soit un réel $q \geq 2$ et N une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre q .

- 1 ▷ On pose $X = q^N$. Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$, X^m est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(X^m)$.

On pose $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - q^k}$.

- 2 ▷ Déterminer R le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$.

On pose alors $\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

- 3 ▷ Montrer que : $\forall x \in]-R, R[\quad f(qx) = (1 - x)f(x)$.

- 4 ▷ En déduire, pour $m \in \mathbf{N}$, la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)}$.

- 4 ▷ Justifier l'existence d'une variable aléatoire U à valeurs dans \mathbf{N} telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(U = n) = \mathbf{P}(N = n) \left(1 + \frac{n!c_n}{2} \right)$$

- 5 ▷ On pose $Y = q^U$. Les variables aléatoires X et Y suivent-elles la même loi ?

- 6 ▷ Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X^m) = \mathbf{E}(Y^m)$.

2 Problème :

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $] -1, +\infty[$ de \mathbf{R} est appelé I et σ et f sont les fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x dt$$

Calcul de $\sigma(1)$

- 1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.
- 2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^\pi (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$$

puis vérifier que si $t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

- 3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe \mathcal{C}^1 de $[0, \pi]$ dans \mathbf{R} , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin(xt) dt = 0$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

Équivalents

- 4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I, (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \quad (1)$$

- 5 ▷ Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 , décroissante et convexe sur I .
- 6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 .
- 7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

- 8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n dt$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Pour $n \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ et la calculer.

12 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du$$

puis que $(-1)^n D_n - n! = O((n-1)!)$.

(On rappelle l'inégalité de convexité : $e^x - 1 \geq x$ pour $x > 0$.)

En déduire un équivalent simple de D_n .

13 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Fin du sujet