1 Exercice :

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Soit un réel $q \geqslant 2$ et N une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre q.

1 ▷ On pose $X = q^N$. Montrer que pour tout $m \in \mathbf{N}$, X^m est d'espérance finie et calculer $\mathbf{E}(X^m)$.

On pose $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1-q^k)$.

2 ▷ Déterminer R le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n x^n$.

On pose alors $\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

3 ▷ Montrer que : $\forall x \in]-R, R[\quad f(qx) = (1-x)f(x)$.

4 ▷ En déduire, pour $m \in \mathbf{N}$, la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)}$.

4 ▷ Justifier l'existence d'une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(U = n) = \mathbf{P}(N = n)\left(1 + \frac{n!c_n}{2}\right)$$

5 ▷ On pose $Y = q^U$. Les variables aléatoires X et Y suivent-elles la même loi ?

6 ▷ Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\mathbf{E}(X^m) = \mathbf{E}(T^m)$.

2 Problème :

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1, +\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \, \mathrm{d}t$$

Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 ▷ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2 + \beta t\right) \cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

puis vérifier que si $t \in]0, \pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

3 ▷ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin(xt)\mathrm{d}t = 0$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}$$

Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \tag{1}$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n\ \mathrm{d}t$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Pour $n \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ et la calculer.

12 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}}\,\mathrm{d}u$$

puis que $(-1)^n D_n - n! = O((n-1)!)$.
(*On rappelle l'inégalité de convexité :* $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant x$ *pour* $x > 0$.)

En déduire un équivalent simple de D_n.

13 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Fin du sujet