Exercice 1 : Somme - Minimum et Différence

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même sspace probbailisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et telles que : $X \sim Y$ et

$$X(\Omega) = \mathbf{N} \text{ et } \forall k \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(X = k) = pq^k \text{ avec } q = 1 - p \text{ et } p \in]0, 1[$$

1. Soit $k \in \mathbf{N}$, calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$.
2. Déterminer la loi de $S = X + Y$. Calculer l'espérance et la variance de S.
3. Pour $n \in \mathbf{N}$, déterminer la loi conditionnelle de la variable aléatoire X sachant $(S = n)$.
4. On pose $V = Y - X$ et $M = min(X, Y)$.
   (a) Dans quels ensembles les variables aléatoires V et M prennent-elles leurs valeurs ?
   (b) Pour $k \in \mathbf{N}$, calculer $\mathbf{P}(M \geqslant k)$.
   (c) En déduire la loi de M, puis l'espérance et la variance de M.
   (d) Soit $(k, r) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$, calculer $\mathbf{P}(M = k, V = r)$.
   On pourra distinguer les cas $r < 0$ et $r \geqslant 0$.
   (e) En déduire la loi de V.
   (f) Les variables aléatoires V et M sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 : Utilisation des fonctions génératrices

I - Avec des variables aléatoires finies

On jette deux dés à six faces. On note X et Y les variables aléatoires donnant la valeur de la face obtenue par le premier et le second dé. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. On note $Z = X+Y$ la variable aléatoire donnant la somme des deux faces obtenues.

1. Préciser l'univers Ω modélisant cette expérience.
2. Donner $Z(\Omega)$.

On suppose qu'il est possible de piper les deux dés de sorte que la variable aléatoire Z suivent une loi uniforme.

3. Montrer que la fonction génératrice de Z est de la forme $G_Z(t) = t^2P(t)$ avec P un polynôme de degré 10 à coefficients réels.
4. Proposer une autre écriture de la fonction génératrice de Z de la forme $G_Z(t) = t^2Q(t)R(t)$ avec Q et R des polynômes de degré 5.
5. Montrer que $P = QR$.
6. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} z^k = 0$.
7. Prouver que Q et R ont au moins une racine réelle.
8. Aboutir à une contradiction et conclure.

II- Avec une variable aléatoire dénombrable

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ un espace probbailisé et deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $Y \sim \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$.
On pose $Z = XY$.

1. Montrer que $\mathbf{P}(Z = 0) = q + pe^{\lambda}$ avec $q = 1 - p$.

2. En déduire que $G_Z = G_Y \circ G_X$.

3. Calculer alors l'espérance et la variance de Z.

III - Lien entre fonction génératrice, espérance et variance

1. Donner le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ pour $n = 1$ puis $n \geqslant 1$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $p \in]0,1[$, $q = 1 - p$ et pour $k \in \mathbf{N}$, $p_k = \dbinom{n+k-1}{k} p^n q^k$.
   Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbf{N}$.

3. Soit X une variable aléatoire vérifiant : $\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = p_k$.
   Déterminer la fonction génératrice de X, puis calculer l'espérance et la variance de X.