1 Exercice : Extrait de Oral ESCP 2023

Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Soit un réel $q \geqslant 2$ et N une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre q.

1 ▷ On pose $X = q^N$.
Par théorème du transfert, $X^m = q^{mN}$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(q^{nm}\mathbf{P}(N = n))_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable.

$\forall n \in \mathbf{N} \quad q^{nm}\mathbf{P}(N = n) = e^{-q}q^{nm}\dfrac{q^n}{n!} \geqslant 0$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(N = n) \in [0, +\infty]$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(N = n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-q}\frac{q^{nm+n}}{n!} \\
&= e^{-q}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(q^{m+1})^n}{n!} \\
&= e^{-q}e^{q^{m+1}} \\
\sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(N = n) &= e^{q(q^m-1)} < +\infty
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X^m \text{ est d'espérance finie avec } \mathbf{E}(X^m) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(N = n) = e^{q(q^m-1)}.}$$

On pose $c_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-q^k}$.

2 ▷ Notons R le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n x^n$.
Par hypothèse $q \geqslant 2$ donc $\forall k \in \mathbf{N}^* \quad q^k \geqslant 2$ et $1 - q^k \neq 0$, alors $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_n \neq 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$, alors

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{|1-q^{n+1}|} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Par le critère de d'Alembert, } R = +\infty.}$$

On pose alors $\forall x \in]-R, R[\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

3 ▷ $\forall x \in]-R, R[\quad qx \in]-R, R[$ puisque $R = +\infty$.

On en déduit que pour $x \in]-R, R[$

$$\begin{aligned}
(1-x)f(x) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+1} \\
&\quad \text{par le changement d'indice } k = n+1 \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k-1} x^k \\
&= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n - c_{n-1}) x^n
\end{aligned}$$

On remarque que $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad c_n = \dfrac{1}{1-q^n} c_{n-1}$ donc

$$c_n - c_{n-1} = c_{n-1}\left(\frac{1}{1-q^n} - 1\right) = c_{n-1} \times \frac{q^n}{1-q^n} = c_n q^n$$

Ce qui donne

$$(1-x)f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n q^n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (qx)^n = f(qx)$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x \in]-R, R[\quad f(qx) = (1-x)f(x)}$$

4 ▷ Soit $m \in \mathbf{N}$, avec l'égalité vue précédemment on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)} = f(q^{m+1}) = (1-q^m)f(q^m)$$

$f(q) = f(q \times 1) = (1-1)f(1) = 0.$
Soit $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $f(q^m) = 0.$
Alors $f(q^{m+1}) = f(q \times q^m) = (1-q^m)f(q^m) = 0.$

Par récurrence on a obtenu : $\forall m \in \mathbf{N} \quad f(q^{m+1}) = 0$, donc $\boxed{\forall m \in \mathbf{N} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)} = 0.}$

5 ▷ • $c_0 = 1$ donc $0!c_0 = 1$.

$1!c_1 = \dfrac{1}{1-q}$ et $q \geqslant 2$, donc $1-q \leqslant -1$ et $|1-q| \geqslant 1$, ce qui entraine $|1!c_1| \leqslant 1$.

$$\forall n \geqslant 2 \quad n!c_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{1-q^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{(1-q)(1+q+\cdots+q^{k-1})}$$

$q \geqslant 2$ donc on peut écrire $\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad 1 + q + \cdots + q^{k-1} \geqslant k > 0$ et donc $0 < \dfrac{k}{1 + q + \cdots + q^{k-1}} \leqslant 1$ et on vient de voir que $\left|\dfrac{1}{1-q}\right| \leqslant 1$, donc par produit $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \left|\dfrac{k}{1-q^k}\right| \leqslant 1$ et finalement $|n!c_n| \leqslant 1$.

On a donc $1 - \dfrac{1}{2} \leqslant 1 + \dfrac{n!c_n}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(N = n)\left(1 + \dfrac{n!c_n}{2}\right) \geqslant 0$.

• $\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{P}(N = n)\dfrac{n!c_n}{2} = e^{-q}c_n q^n$, alors la série $\sum \mathbf{P}(N = n)\dfrac{n!c_n}{2}$ converge absolument (question 2) avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n)\frac{n!c_n}{2} = \frac{e^{-q}}{2}f(q) = 0$.

On en déduit par linéarité que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n)\left(1 + \frac{n!c_n}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N = n) = 1$.

Les deux points précédents permettent de justifier que l'on définit ainsi la loi de probabilité d'une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbf{N}$.

6 ▷ On pose $Y = q^U$. Puisque $U(\Omega) \subset \mathbf{N}$, on a $Y(\Omega) \subset]0, +\infty[$, de même pour $X = q^N$ on a $X(\Omega) \subset]0, +\infty[$.

<u>1ère méthode :</u>

Plutôt que de travailler sur les lois de X et de Y qui n'ont jamais été demandées précédemment, on passe par les lois de U et N qui, elles, sont connues.

Puisque $Y = q^U$ et $X = q^N$, on a : $U = \dfrac{\ln Y}{\ln q}$ et $N = \dfrac{\ln X}{\ln q}$, alors avec $f : t \mapsto \dfrac{\ln t}{\ln q}$, on a $U = f(Y)$ et $N = f(X)$.

On en déduit que si X et Y suivent la même loi, alors N et U suivent la même loi mais

$$\mathbf{P}(U = 1) = \mathbf{P}(N = 1)\left(1 + \frac{c_1}{2}\right) = \mathbf{P}(N = 1)\left(1 + \frac{1}{2(1-q)}\right) = \mathbf{P}(N = 1) \times \frac{3 - 2q}{2 - 2q}$$

donc $\mathbf{P}(U = 1) \neq \mathbf{P}(N = 1)$.

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X \text{ et } Y \text{ ne suivent pas la même loi.}}$$

<u>2nde méthode :</u>

$N(\Omega) = \mathbf{N}$ et $X = q^N$ alors $X(\Omega) = \{q^n, \quad n \in \mathbf{N}\}$.
$Y = q^U$ et $U(\Omega) \subset \mathbf{N}$ donc $Y(\Omega) \subset \{q^n, \quad n \in \mathbf{N}\}$.

Si X et Y suivent la même loi alors on doit avoir en particulier $\mathbf{P}(X = q) = \mathbf{P}(Y = q)$.
Or par bijection de la fonction $t \mapsto q^t$, on a : $\mathbf{P}(X = q) = \mathbf{P}(q^N = q) = \mathbf{P}(N = 1)$ et

$\mathbf{P}(Y = q) = \mathbf{P}(q^U = q) = \mathbf{P}(U = 1)$.
On termine comme précdemment avec $\mathbf{P}(N = 1) \neq \mathbf{P}(U = 1)$.

7 ▷ On a vu que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{E}(X^m) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(N = n) = e^{q(q^m-1)}$.

Puisque $\forall n \in \mathbf{N} \quad (q^m)^n\, \mathbf{P}(U = n) \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(U = n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(N = n)\left(1 + \frac{n!c_n}{2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(N = n) + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-q}\frac{q^n q^{nm} c_n}{2} \\
&= \mathbf{E}(X^m) + \frac{e^{-q}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} c_n q^{n(m+1)}
\end{aligned}$$

et par le résultat de la question 4

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(U = n) = \mathbf{E}(X^m) < +\infty$$

Alors par le théorème du transfert, Y^m est d'espérance finie avec

$$\mathbf{E}(Y^m) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{nm}\mathbf{P}(U = n) = \mathbf{E}(X^m)$$

On a donc $\forall m \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{E}(X^m) = \mathbf{E}(Y^m)$.

Deux variables aléatoires peuvent avoir les mêmes moments d'ordre m pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ sans avoir même loi.

2 Problème : Extrait de MinesPonts MP 2023

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1, +\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \ \mathrm{d}t$$

Calcul de $\sigma(1)$

1 ▷ <u>1ère méthode : sans les séries entières</u>

• $\forall x \notin [-1,1]$ $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|x|^k}{k^2} = +\infty$ par croissances comparées alors $\forall x \notin [-1,1]$, la série définissant σ est grossièrement divergente.

On pouvait aussi appliquer la règle de d'Alembert avec $u_k = \dfrac{x^k}{k^2}$ *pour obtenir cette divergence grossière.*

• $\forall x \in [-1,1]$ $\left|\dfrac{x^k}{k^2}\right| = \dfrac{|x|^k}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ et on sait que la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k^2}$ est convergente puisque $2 > 1$, alors par comparaison la série $\sum \dfrac{x^k}{k^2}$ est absolument convergente.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de la fonction } \sigma \text{ est donc } [-1,1].}$$

<u>2nde méthode : avec les séries entières</u>

On remarque que σ est la somme d'une série entière de coefficients $a_k = \dfrac{1}{k^2}$.
La série entière $\sum a_k x^k$ a même rayon de convergence que $\sum k a_k x^k$, qui a même rayon fde convergence que $\sum k(ka_k)x^k$.
On en déduit que la série entière $\sum a_k x^k$ a le même rayon de convergence que $\sum x^k$.

$\sum a_k x^k$ est donc de rayon de convergence $R = 1$, alors on sait que $\forall x \in]-R, R[$ $\sum a_k x^k$ converge absolument et si $|x| > R$ alors $\sum a_k x^k$ diverge grossièrement.

De plus la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{k^2}$ est convergente $(2 > 1)$, alors la série $\sum \dfrac{x^k}{k^2}$ converge absolument pour $x = 1$ et $x = -1$.

On en déduit que la série $\sum \dfrac{x^k}{k^2}$ converge si, et seulement si, $x \in [-1,1]$.

$$\boxed{\text{Le domaine de définition de la fonction } \sigma \text{ est donc } [-1,1].}$$

• Pour $k \in \mathbf{N}^*$, $f_k : x \mapsto \dfrac{x^k}{k^2}$ est continue sur le segment $[-1,1]$.

$\forall x \in [-1,1]$ $|f_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, alors $\|f_k\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ avec $\|f_k\|_\infty = \underset{s\in[-1,1]}{Sup} |f_k(x)|$.
On en déduit que la série à termes positifs $\sum \|f_k\|_\infty$ est convergente.
La série de fonctions $\sum f_k$ étant normalement convergente sur $[-1,1]$, elle est aussi uniformément convergente et par théorème de continuité

$$\boxed{\text{La fonction } \sigma \text{ est continue sur son domaine de définition } [-1,1].}$$

2 ▷ • Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ les fonctions $u : t \mapsto \alpha t^2 + \beta t$ et $v : t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{n}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$, alors par intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \int_0^\pi u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi (2\alpha t + \beta)\sin(nt)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Les fonctions $u : t \mapsto 2\alpha t + \beta$ et $v : t \mapsto \dfrac{\cos(nt)}{n}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$, alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi (2\alpha t + \beta)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^\pi u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}[u(t)v(t)]_0^\pi - \frac{1}{n}\textstyle\int_0^\pi u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^n(2\alpha\pi+\beta)}{n} - \frac{\beta}{n}\right) - \frac{2\alpha}{n^2}\int_0^\pi \cos(nt)\mathrm{d}t \\
\int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t &= \frac{(-1)^n(2\alpha\pi+\beta)-\beta}{n^2} - \frac{2\alpha}{n^2}\left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi \\
&= \frac{(-1)^n(2\alpha\pi+\beta)-\beta}{n^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En prenant } \beta = -1 \text{ et } \alpha = \frac{1}{2\pi} \text{ on obtient alors } \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$$

• <u>1ère méthode :</u> Soit $t \in]0,\pi]$, alors pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \cos(kt) &= \sum_{k=1}^n Re\left(e^{ikt}\right) \\
&= Re\left(\sum_{k=1}^n (e^{it})^k\right)
\end{aligned}$$

Or $e^{it} \neq 1$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) &= Re\left(e^{it}\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\right)\\
&= Re\left(e^{it}\times\frac{e^{int/2}}{e^{it/2}}\times\frac{-2i\sin\left(\dfrac{nt}{2}\right)}{-2i\sin(t/2)}\right)\\
&= Re\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right)\\
&= \frac{\sin(nt/2)\cos((n+1)/2)}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

Or $2\sin(a)\cos(b)=\sin(a+b)+\sin(a-b)$ donc

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}t\right)+\sin\left(-\dfrac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$$

Finalement $\boxed{\forall n\in\mathbf{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}-\dfrac{1}{2}}$

<u>2nde méthode :</u> Par récurrence sur n, on peut aussi montrer l'égalité précédente.

3 $\triangleright$ • Soit $x>0$. Si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors par intégration par partie avec $v : t\mapsto\dfrac{-\cos(xt)}{x}$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi}\varphi(t)v'(t)\mathrm{d}t_{-}\\
&= [\varphi(t)v(t)]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\varphi'(t)v(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t = \frac{\varphi(0)-\varphi(\pi)\cos(x\pi)}{x}+\frac{1}{x}\int_0^{\pi}\varphi'(t)\cos(xt)\mathrm{d}t$$

Par inégalité triangulaire avec $|\cos(y)|\leqslant 1$ pour tout $y\in\mathbf{R}$, on a :

$$0\leqslant\left|\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{|\varphi(0)|+|\varphi(\pi)|}{x}+\frac{1}{x}\int_0^{\pi}|\varphi'(t)|\mathrm{d}t$$

Par théorème d'encadrement on obtient alors $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(xt)\mathrm{d}t=0}$

• D'après les résultats de la question 2, on peut écrire avec $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$ et $\beta = -1$:

$$\sigma(1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t)\cos(kt)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t)\cos(kt)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}
\sigma(1) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\mathrm{d}t \right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \left(\frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \left(\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \frac{\alpha t^2 + \beta t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t \right) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \alpha t^2 + \beta t\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Soit $\varphi : t \in [0,\pi] \mapsto \begin{cases} \beta & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{\alpha t^2 + \beta t}{2\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$. φ est de classe C^1 sur $]0,\pi]$ par quotient de fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{2}$ alors $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \alpha t + \beta$. On en déduit que φ est continue sur $[0,\pi]$.

$$\forall t \in]0,\pi] \quad \varphi'(t) = \frac{2(2\alpha t + \beta)\sin(t/2) - (\alpha t^2 + \beta t)\cos(t/2)}{4\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)}$$

En utilisant des développements limités à l'ordre 2 au voisinage de 0 de sinus et cosinus, on obtient

$$\varphi'(t) = \frac{(2\alpha t^2 + \beta t) - \alpha t^2 - \beta t + o(t^2)}{2\dfrac{t^2}{4} + o(t^2)}$$

On en déduit que $\lim\limits_{t\to 0} \varphi'(t) = 2\alpha \in \mathbf{R}$.

φ est continue sur le segment $[0,\pi]$, de classe C^1 sur $]0,\pi]$ et φ' admet une limite finie en 0 alors par le théorème de la limite de la dérivée on obtient que φ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

Par le résultat démontré en début de question 3, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t = 0$$

et finalement $\sigma(1) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \alpha t^2 + \beta t\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\alpha t^3}{3} + \dfrac{\beta t^2}{2}\right]_0^{\pi}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2\pi}$ et $\beta = -1$.

ce qui donne : $\boxed{\sigma(1) = \dfrac{\pi^2}{6}}$

Équivalents

4 ▷ • La fonction sinus est continue sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ à valeurs strictement positives, donc $\forall x \in \mathbf{R} \quad t \mapsto (\sin(t))^x$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et est à valeurs positives.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x \mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On sait que $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, alors pour $x \in \mathbf{R} \quad (\sin(t))^x \underset{t\to 0}{\sim} t^x$, et d'après les intégrales de Riemann on sait que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^{-x}}$ est intégrable en 0 si et seulement si $-x < 1$.

Par comparaison la fonction positive $t \mapsto (\sin(t))^x$ est intégrable en 0 (et donc sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$), si et seulement si $x > -1$.

$\boxed{\text{On en déduit que le domaine de définition de } f \text{ est } I =]-1, +\infty[.}$

Si $x \in I$, $x + 1 \in I$ et $x + 2 \in I$.

$f(x+2) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{x+1}(t) \times \sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t) \times v'(t)\mathrm{d}t$ avec $u : t \mapsto (\sin t)^{x+1}$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$. Ces fonctions u et v sont de classe C^1 sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\displaystyle\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ car $x + 1 > 0$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= [u(t)v(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 - u\left(\frac{\pi}{2}\right) v\left(\frac{\pi}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\cos(t)\sin^x(t) \times \cos(t)\mathrm{d}t \\
&= (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) \times \cos^2(t)\mathrm{d}t \\
&= (x+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\left(1 - \sin^2(t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et par linéarité $f(x+2) = (x+1)f(x) - (x+1)f(x+2)$.

$$\boxed{\text{On a donc obtenu : } \forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2) \qquad (1)}$$

5 ▷ Soit $g : \begin{array}{ccc} I \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbf{R} \\ (x,t) & \mapsto & \sin^x(t) \end{array}$. Vérifions les hypothèses du théorème de classe C^2 :

• On a vu en question 4 que, pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur I avec
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \ln(\sin t) \times \exp\left(x \ln(\sin t)\right)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \ln^2(\sin t) \times (\sin t)^x$.

• $\forall x > -1$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par produit de fonctions continues.

• $\ln(\sin t) \underset{0}{=} \ln\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) \underset{0}{=} \ln(t) + \ln\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right) \underset{0}{=} \ln(t) + o(\ln(t))$, donc avec ce qui a été fait en question 4 on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x \ln(t)$$

$x > -1$ alors il existe α tel que $x > \alpha > -1$, $\left(\text{par exemple } \alpha = \frac{x-1}{2}\right)$, et donc
$\frac{t^x \ln(t)}{t^\alpha} = t^{x-\alpha}\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées puisque $x - \alpha > 0$.

On en déduit que $t^x \ln(t) \underset{t\to 0}{=} o(t^\alpha)$, or pour $\alpha > -1$ la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est intégrable en 0 donc par comparaison la fonction $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable en 0 et donc sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• *Hypothèse de domination sur tout segment :*

Soit $[a,b] \subset I$. $\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 < \sin(t) \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \sin^x(t) \leqslant \sin^a(t)$ et donc

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad 0 \leqslant \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) \leqslant \ln^2(\sin(t)) \times \sin^a(t)$$

Notons $\varphi : t \mapsto \ln^2(\sin(t)) \times \sin^a(t)$, cette fonction est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et comme précédemment on obtient : $\varphi(t) \underset{0}{\sim} t^a \times \ln^2(t) \underset{0}{=} o(t^\alpha)$ avec $a > \alpha > -1$, donc par double comparaison la fonction φ est intégrable en 0 et finalement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Par théorème de la classe C^2 pour une intégrale à paramètre, on en déduit que la fonction f est de classe C^2 sur I avec pour $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\sin^x(t)\mathrm{d}t \leqslant 0 \\ f''(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(t))\sin^x(t)\mathrm{d}t \geqslant 0 \end{aligned}$$

$\boxed{f \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^2\text{, décroissante et convexe sur } I.}$

6 ▷ • On a vu : $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$, et f est continue sur I donc en 1 et

$$\lim_{x\to -1}(x+2)f(x+2) = f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f(x) \underset{-1}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$$

7 ▷ Avec la relation $(x+1)f(x) = (x+2)f(x+2)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad (n+1)f(n)f(n+1) = (n+2)f(n+1)f(n+2)$$

On en déduit que la suite $((n+1)f(n)f(n+1))_{n\in\mathbf{N}}$ est constante, donc

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad (n+1)f(n)f(n+1) = f(0)f(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t \times 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}}$$

On sait que $\forall n \in \mathbf{N} \quad f(n+2) \leqslant f(n+1) \leqslant f(n)$ et $f(n) > 0$, donc $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{f(n+1)}{f(n)} \leqslant 1$ et par théorème d'encadrement $f(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(n)$, ce qui donne

$$f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

• On sait que $\forall x \in [0, +\infty[\quad 0 \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ alors par décroissance de f :

$$f(\lfloor x \rfloor) \leqslant f(x) \leqslant f(\lfloor x \rfloor + 1)$$

$\lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ donc

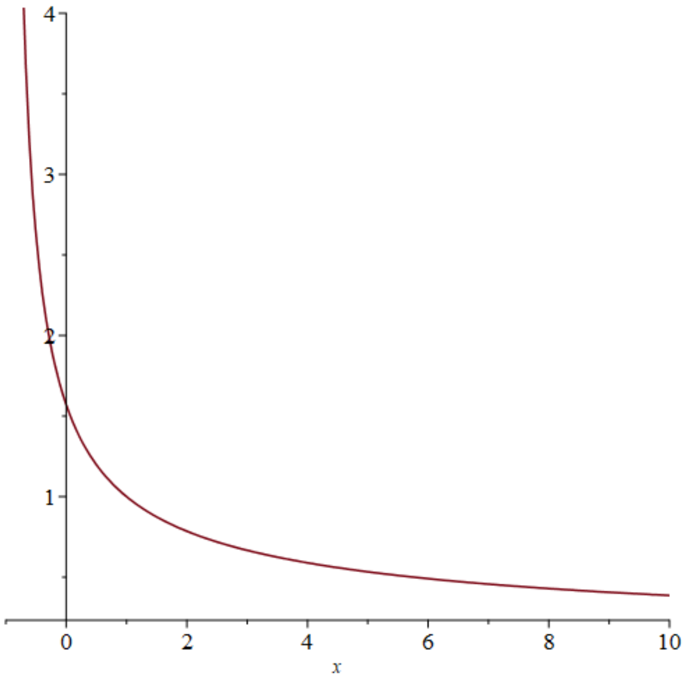
$$f(\lfloor x \rfloor + 1) \underset{+\infty}{\sim} f(\lfloor x \rfloor) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}}$$

Par théorème d'encadrement, puisque et $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, on a alors

$$\boxed{f(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\lfloor x \rfloor}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

8 ▷ On sait que la fonction est positive, décroissante, convexe sur $]-1, +\infty[$ avec des équivalents aux bornes de I qui permettent d'avoir les limites en ces bornes. ce qui donne :

$$f := x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x \, \mathrm{d}t$$



Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \, \mathrm{d}t$.

9 ▷ • Pour $n \in \mathbf{N}$ la fonction $f_n : t \mapsto (\ln(\sin(t)))^n$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par composée puisque $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \sin(t) \in]0, 1]$.

On a déjà vu que $\ln(\sin t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$, donc $f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} \ln^n(t)$, et alors par croissances comparées $\lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t} f_n(t) = \lim\limits_{t\to 0} \sqrt{t} \ln^n(t) = 0$. On a donc $f_n(t) \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. D'après les intégrales de Riemann la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 donc par comparaison la fonction f_n est intégrable en 0.

$$\boxed{\text{Finalement } \forall n \in \mathbf{N}, \text{ l'intégrale généralisée } D_n \text{ est convergente.}}$$

- Par le changement de variable affine $t = \dfrac{\pi}{2} - u$, on a immédiatement

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} (-1)\ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\mathrm{d}u$$

10 ▷ D'après les résultats de la question 5, on sait que

$$f'(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t = D_1 \text{ et } f'(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t$$

Avec le résultat de la question 9 et par linéarité de l'intégrale avec $\ln a + \ln b = \ln(ab)$, on peut écrire

$$2D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)\cos(t))\mathrm{d}t$$

et donc

$$\begin{aligned}
D_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2t))\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(2)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\ln(\sin(2t))\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $u = 2t$

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\frac{\pi\ln 2}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln(\sin(u))\mathrm{d}u \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{4} + \frac{1}{4}D_1 + \frac{1}{4}\int_{\pi/2}^{\pi}\ln(\sin u)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $u = x + \dfrac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\frac{\pi\ln 2}{4} + \frac{D_1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\ln\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{4} + \frac{D_1}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\ln(\cos(x))\,\mathrm{d}x \\
D_1 &= -\frac{\pi\ln 2}{4} + \frac{D_1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ce qui donne } f'(0) = D_1 = \frac{-\pi\ln(2)}{2}}$$

$f'(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} -\varphi'(t)\ln(\sin(t)\mathrm{d}t$ avec $\varphi : t \mapsto \cos(t)$, qui est une bijection décroissante de classe C^1 de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, 1[$.

De plus $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) = \sqrt{1-\cos^2(t)}$, alors $f'(1) = -\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t)\ln\left(\sqrt{1-\varphi^2(t)}\right)\mathrm{d}t$.

La fonction $g : u \mapsto \ln\left(\sqrt{1-u^2}\right)$ étant continue sur $[0,1[$, le changement de variable $u = \varphi(t)$ donne :

$$\begin{aligned} f'(1) &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t)g(\varphi(t))\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 g(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-u^2)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-u)+\ln(1+u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

On sait qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ est $x \mapsto x\ln(x) - x$, alors

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{1}{2}\left[(1+u)\ln(1+u) - (1+u) - (1-u)\ln(1-u) + (1-u)\right]_0^1 \\ f'(1) &= \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

2nde méthode :

$f'(1) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ avec $u : t \mapsto 1-\cos(t)$ et $v : t \mapsto \ln(\sin t)$ qui sont de classe C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et

$$u(t)v(t) = (1-\cos(t))\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}\ln(t)$$

donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$.
Si on prend $u : t \mapsto -\cos(t)$, la limite en 0 de uv n'est pas finie, et il faut faire une intégration par parties sur $[a, \frac{\pi}{2}]$ puis passer à la limite quand $a \to 0$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}
f'(1) &= [u(t)v(t)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{\pi/2} (1-\cos(t))\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{\pi/2} (1-\cos(t)) \times \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} \times \sin(t)\mathrm{d}t \\
& \quad \text{avec le changement de variable } u=\cos(t) \\
f'(1) &= -\int_0^1 (1-u) \times \frac{u}{1-u^2}\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^1 \frac{u}{1+u}\, du \\
&= -\int_0^1 1 - \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u \\
&= -\left[u - \ln|1+u|\right]_0^1 \\
f'(1) &= \ln(2) - 1
\end{aligned}$$

11 ▷ Pour $n \in \mathbf{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et par croissances coparées $t^n e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. D'après les intégrales de Riemann, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$ puisque $2>1$, alors par comparaison la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ et l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

Les fonctions $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[0,+\infty($ avec par croissances comparées $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$, alors par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} nt^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t \\
I_n &= nI_{n-1}
\end{aligned}$$

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 = 0!$. Les deux suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(n!)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient la même relation de récurrence linéaire d'ordre 1 et ont même premier terme, donc $\boxed{\forall n \in \mathbf{N} \quad I_n = n!.}$

12 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction $\varphi : t \mapsto -\ln(\sin(t))$ est dec lasse C^1 sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec $\varphi'(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} < 0$, alors φ réalise une bijection strictement décroissante de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0, +\infty[$.

Par le changement de variable $u = \varphi(t) \iff t = \varphi^{-1}(u) = \arcsin(e^{-u})$, on a alors

$$\begin{aligned}
(-1)^n D_n &= \int_0^{\pi/2} (-\ln(\sin(t)))^n \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{+\infty} \left(\varphi^{-1}\right)'(u) u^n \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}} \times u^n \mathrm{d}u \\
(-1)^n D_n &= \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{e^{2u}-1}} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Avec le résultat de la question 11, on obtient :

$$\begin{aligned}
(-1)^n D_n - n! &= \int_0^{+\infty} u^n \left(\frac{1}{\sqrt{e^{2u}-1}} - e^{-u} \right) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{2u}-1}} \left(e^u - \sqrt{e^{2u}-1} \right) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{\sqrt{e^{2u}-1}} \times \frac{1}{e^u + \sqrt{e^{2u}-1}} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$\forall u > 0 \quad e^u + \sqrt{e^{2u}-1} \geqslant 1$ et $e^{2u} - 1 \geqslant 2u > 0$ par inégalité de convexité, donc

$$0 \leqslant (-1)^n D_n - n! \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{u^n e^{-u}}{2u} \mathrm{d}u$$

Et donc $0 \leqslant (-1)^n D_n - n \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-u} \mathrm{d}u$, ce qui donne $0 \leqslant (-1)^n D_n - n! \leqslant (n-1)!$.

On obtient : $(-1)^n D_n - n! = O((n-1)!) = o(n!)$ et donc $D_n \sim (-1)^n n!$.

13 ▷ $\forall x \in]-1, 1[\quad f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(x \ln(\sin(t))) \mathrm{d}t$, or $\forall u \in \mathbf{R} \quad e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, donc

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln^n(\sin(t))}{n!} x^n \mathrm{d}t$$

Posons $f_n : t \mapsto \dfrac{\ln^n(\sin(t))}{n!} x^n$.

- $\forall n \in \mathbf{N} \quad f_n$ est intégrable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ d'après le résultat de la question 9.

• La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = (\sin(t))^x$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

• Avec le résultat de la question 12, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{|\ln(sin(t))|^n}{n!}|x|^n\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n D_n}{n!}|x|^n \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$$

alors par comparaison puisque $x \in]-1, 1[$, la série $\sum \int_0^{\pi/2} |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Par théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle, on sait que

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!}x^n$$

$\boxed{\text{On a bien obtenu que } f \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[.}$