Sans calculatrice

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice n°1 :

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. Á chaque instant $t \in \mathbf{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbf{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0, 1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t\in\mathbf{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbf{N}^* \quad \mathbb{P}(X_t = 1) = p \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t.

Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Partie I - Un développement en série entière

Q1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbf{N}$. Donner sans démonstration un développement en série entière de la fonction réelle $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ au voisinage de 0 en précisant son rayon de convergence.

Q2. En déduire que pour tout $x \in] - 1; 1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}x^n.$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \mathbb{P}(S_n = 0).$$

Q3. Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_t+1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t+1}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Q4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q5. Déterminer la limite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$ selon les valeurs de p et interpréter le résultat.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathbf{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n.
Dans cette partie, on souhaite déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n)$.

Q6. Soit $n \in \mathbf{N}$. Que modélise la variable aléatoire T_n ?

Q7. Soit $j \in \mathbf{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire O_{2j}. En déduire que :

$$\mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^{j}.$$

Q8. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}$. En utilisant le résultat de la **Q2**, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n)$ et interpréter le résultat.

Q9. On suppose dans cette question que $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$$

et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n)$.

Exercice n°2 :

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

où $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit bien ainsi des lois de probabilité.

2. Justifier que la variable aléatoire X est d'espérance finie et calculer cette espérance.

3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Fin du sujet