Sans calculatrice

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Lorsqu'un raisonnement utilise le résultat d'une question précédente, il est demandé au candidat d'indiquer précisément le numéro de la question utilisée.

Exercice n°1 : Une matrice aléatoire

Soit ε, X et Y trois variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que ε suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$; et que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On considère la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} (2\varepsilon-1)X & Y \\ Y & (2\varepsilon-1)X \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que la matrice M soit inversible.

2. Calculer la probabilité que la matrice M soit à valeurs propres strictement positives.

Exercice n°2 : Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in]0,1[\text{ et } q = 1-p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse S_n du point à l'issue du n-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geq 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$).
On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \qquad \text{et} \qquad b_n = \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0]\cap[S_2 \neq 0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1} \neq 0]\cap[S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

Partie I

3. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\dfrac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n.

4. Écrire une fonction Python qui prend en argument le nombre n de lancers ainsi que le paramètre p et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

   On pourra utiliser la fonction Python random.random() qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

5. Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $a_n = \dbinom{2n}{n} p^n q^n$.

6. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

7. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?

8. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

Partie II

9. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

10. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.

11. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.

12. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?

Partie III

13. En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.

Exercice 3 : Si vous avez terminé les deux premiers exercices

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et N leur somme. Une urne contient initialement a boules noires et b boules blanches. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :
- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne ;
- si elle est noire, elle est remplacée par une boule blanche prise dans une réserve annexe.

On définit deux variables aléatoires : T_k vaut 1 si l'on pioche une boule noire au k-ième tirage
et 0 sinon ; X_k est le nombre de boules noires piochées lors des k premiers tirages.

14. Déterminer la loi de T_1 et celle de T_2.

15. Montrer que $P\left(T_{n+1} = 1\right) = \dfrac{a - E(X_n)}{N}$. En déduire que $P(T_n = 1) = a\dfrac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$.

16. Calculer $E(X_n)$ puis déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

Fin du sujet