Exercice n°1 : Extrait de CCINP PSI 2023

On considère une particule se déplaçant sur une droite graduée par les entiers relatifs. Sa position à l'instant initial $t = 0$ est $k = 0$. Á chaque instant $t \in \mathbf{N}^*$, elle se déplace aléatoirement de sa position $k \in \mathbf{Z}$ à la position $k + 1$ ou $k - 1$.

Soit $p \in]0, 1[$. On définit sur un espace probabilisé $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_t)_{t \in \mathbf{N}^*}$ et identiquement distribuées dont la loi est définie par :

$$\forall t \in \mathbf{N}^* \quad \mathbb{P}(X_t = 1) = p \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}(X_t = -1) = 1 - p.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t$.

Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire X_t modélise le déplacement de la particule à l'instant t.

Si $X_t = 1$, la particule se déplace vers la droite. Si $X_t = -1$, la particule se déplace vers la gauche. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, S_n modélise la position de la particule après n déplacements.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

Partie I - Un développement en série entière

Q1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha \notin \mathbf{N}$. $(1 + x)^\alpha$ se développe en série entière avec un rayon de convergence égal à 1 et

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[\quad (1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n}$$

Q2. On pose $\alpha = -\dfrac{1}{2}$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $(-x) \in]-1, 1[$ on a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= (1 + (-x))^\alpha \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) \times \cdots \times \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) \frac{(-x)^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times 1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1) \frac{x^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{x^n}{n!}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien } \forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x^n}$$

Partie II - Probabilité de retour à l'origine

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n = \mathbb{P}(S_n = 0).$$

Q3. Pour tout $t \in \mathbf{N}^*$, notons $Y_t = \dfrac{X_t + 1}{2}$.

Puisque $X_t(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a $Y_t(\Omega) = \{0, 1\}$, donc

$$\boxed{Y_t \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \mathbb{P}(Y_t = 1) = \mathbb{P}(X_t = 1) = p.}$$

Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes d'après l'énoncé, donc par le lemme des coalitions les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont aussi indépendantes, on sait alors que $\boxed{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } p.}$

Q4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On reprend les notations introduites en question 3.

On remarque que $S_n = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} X_t = \sum_{t=1}^{n} (2Y_t - 1)$, donc

$$u_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2}\right)$$

Par le résultat de la question 3, on sait que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Si n est impair alors $\dfrac{n}{2} \notin [\![0, n]\!]$ et donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2}\right) = 0$.

Si n est pair alors $\dfrac{n}{2} \in [\![0, n]\!]$ et

$$u_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{t=1}^{n} Y_t = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{n-\frac{n}{2}} = \binom{n}{\frac{n}{2}} (p(1-p))^{\frac{n}{2}}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } u_n = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}} \big(p(1-p)\big)^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Q5. D'après le résultat ci-dessus, $u_{2n} = \dbinom{2n}{n} (p(1-p))^n$.

On sait par le rappel sur la formule de Stirling que $(2n)! \sim \left(\dfrac{2n}{\mathbf{e}}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \times 2n}$ et donc

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{(2n)!}{n!^2}(p(1-p))^n \\ &\sim \left(\frac{2n}{\mathbf{e}}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \times 2n} \times \left(\frac{\mathbf{e}}{n}\right)^{2n} \times \frac{(p(1-p))^n}{2\pi n} \\ u_{2n} &\sim \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

La fonction $f : x \mapsto 4x(1-x)$ est polynômiale de degré 2, elle est croissante sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ (si besoin faire le calcul de la dérrivée). f est positive sur $[0, 1]$ et atteint son maximum en $x = \dfrac{1}{2}$ qui vaut 1.

Remarque : *Nous n'avions pas encore évoqué cette propriété intéressante à connaître :* $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ *avec égalité lorsque* $p = \dfrac{1}{2}$*. Ce n'est pas au programme officiel mais on peut la citer en précisant qu'on le montre par étude de fonction ou par connaissance des fonctions polynômiales de degré 2 (extremum global).*

On en déduit que $\forall p \in]0, 1[\quad 0 \leqslant 4p(1-p) \leqslant 1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} = 0$ Et par l'équivalent trouvé, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 0.}$

On peut interpréter ce résultat comme le fait qu'au bout d'un très très grand nombre de déplacements on est presque sûr que la particule n'est pas de retour à l'origine.

Partie III - Nombre de passages par l'origine

Pour tout $j \in \mathbf{N}$, on note O_{2j} la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = 2j$, 0 sinon. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $T_n = \sum_{j=0}^{n} O_{2j}$. On note $\mathbf{E}(T_n)$ l'espérance de la variable aléatoire T_n.
Dans cette partie, on souhaite déterminer $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n)$.

Q6. Soit $n \in \mathbf{N}$. La variable aléatoire T_n modélise le nombre de fois où la particule revient à l'origine entre l'instant initial et l'instant $2n$.

Q7. Soit $j \in \mathbf{N}$. $O_{2j}(\Omega) = \{0, 1\}$ alors avec le résultat de la question 4, O_{2j} suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{P}(O_{2j} = 1) = \mathbb{P}(S_{2j} = 0) = u_{2j} = \binom{2j}{j} (p(1-p)^j$$

On en déduit par linéarité de l'espérance : $\boxed{\mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{E}(O_{2j}) = \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j} \big(p(1-p)\big)^j}$

Q8. On suppose dans cette question que $p \neq \frac{1}{2}$.

On peut écrire $\mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j} (4p(1-p))^j$.

Si $p \neq \frac{1}{2}$ alors $0 < 4p(1-p) < 1$ (résultat vu en question 5), donc par le résultat de la question 2, on obtient $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2j}} \binom{2j}{j} (4p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}$.

Or $1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2 = (2p-1)^2$, donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n) = \frac{1}{|2p-1|}}$$

Q9. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $\mathbf{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$.

- $\mathbf{E}(T_0) = \mathbf{E}(O_0) = 1 = \frac{2 \times 0 + 1}{2^{2\times 0}} \binom{2 \times 0}{0}$. La propriété $\mathcal{P}(0)$ est donc vérifiée.

• Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée.

Par définition $T_{n+1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n+1} O_{2j} = T_n + O_{2(n+1)}$, alors par linéarité de l'espérance, on a : $\mathbf{E}(T_{n+1}) = \mathbf{E}(T_n) + \mathbf{E}(O_{2n+2})$.

Par hypothèse de récurrence $\mathbf{E}(T_n) = \dfrac{2n+1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$, et on a vu en question 7 que $\mathbf{E}(O_{2n+2}) = \dbinom{2n+2}{n+1} \times \dfrac{1}{4^n}$ (car $p = \dfrac{1}{2}$) , alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(T_{n+1}) &= \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)2^{2n}}\binom{2n}{n} + \binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!} + \binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\
&= \frac{(2n+2)!(n+1)}{2^{2n+1}(n+1)!^2} + \binom{2(n+1)}{n+1}\frac{1}{2^{2n+2}} \\
&= \binom{2(n+1)}{n+1}\frac{2(n+1)+1}{2^{2n+2}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a donc montré par récurrence que } \forall n \in \mathbf{N} \quad \mathbf{E}(T_n) = \frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}.}$$

On a déjà vu en question 5 que $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, or $2n+1 \sim 2n$ alors par produit d'équivalents

$$\mathbf{E}(T_n) \sim \frac{2n}{\sqrt{\pi n}}$$

On a ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(T_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = +\infty.}$

Exercice n°2 : Extrait de E3A MP 2020

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbf{N}$ telles que :

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$ donc $q \in]0,1[$ et donc $\forall k \in \mathbf{N} \quad \mathbb{P}'X = k) \geqslant 0$ avec
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} pq^k = p\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{p}{1-q} = 1$$

   $\boxed{\text{On a ainsi bien défini une loi de probabilité.}}$

2. 1ère méthode : avec la définition de l'espérance

   X est une variable aléatoire discrète à valeurs positives, donc X admet une espérance dans $[0,+\infty]$ donnée par $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$. On en déduit que X est d'espérance finie si, et seulement si, $\mathbf{E}(X) = \sum_{k\in\mathbf{N}} k\mathbb{P}(X=k) < +\infty$.

   Autre façon de rédiger *: par définition X est d'espérance finie si et seulement si la famille $(x\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable, c'est-à-dire ici si et seulement si $\sum_{k\in\mathbf{N}} |k\mathbb{P}(X=k)| < +\infty$, or $\forall k \in \mathbf{N} \quad k\mathbb{P}(X=k) \geqslant 0$, donc cela revient à $\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k) < +\infty$, sachant que cette somme existe dans $[0,+\infty]$.*

   La série entière $\sum x^k$ est de rayon de convergence égal à 1, donc $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme donc $\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \frac{1}{1-x} \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$.
   On en déduit que :
$$\mathbf{E}(X) = pq\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p} < +\infty$$

   $\boxed{X \text{ est d'espérance finie avec } \mathbf{E}(X) = \frac{q}{p} = \frac{1-p}{p}.}$

   2nde méthode : en se ramenant à une loi usuelle, ce qui gagne du temps

   On remarque qu'en posant $Z = X+1$ on a : $Z(\Omega) = \mathbf{N}^*$ et
$$\forall k \in \mathbf{N}^* \quad \mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X=k-1) = pq^{k-1} = p(1-p)^{k-1}$$
   alors Z suit une loi géométrique de paramètre p. On sait alors que Z est d'espérance finie, et par linéarité de l'espérance $X = Z-1$ est aussi d'espérance finie avec $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$.

3ème méthode : un mélange des deux premières

X est une variable aléatoire discrète à valeurs positives, donc X est d'espérance finie si, et seulement si, $\mathbf{E}(X) = \sum_{k\in\mathbf{N}} k\mathbb{P}(X = k) < +\infty$, sachant que cette somme existe dans $[0, +\infty]$.

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kpq^k = \sum_{k=1}^{+\infty} kpq^k = q\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$$

On reconnait que $\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$ est la valeur de l'espérance d'une variable aléatoire Z qui suit une loi géométrique de paramètre p, alors on a $\mathbf{E}(X) = q\mathbf{E}(Z) = q \times \dfrac{1}{p}$.

3. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X, on sait que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (X = Y))\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = k))\end{aligned}$$

X et Y étant indépendantes, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k).\mathbb{P}(Y = k)\\ &= p^2\sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k}\\ \mathbb{P}(X = Y) &= p^2\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k \text{ avec } q^2 \in]0, 1[\\ &= \frac{p^2}{1-q^2}\\ \mathbb{P}(X = Y) &= \frac{p}{1+q}\end{aligned}$$

1ère méthode :

$((X < Y), (Y < X), (X = Y))$ forme un système complet d'événements, donc

$$\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(Y < X) + \mathbb{P}(X = Y) = 1$$

or X et Y suivent la même loi alors par symétrie $\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X)$, ce qui donne $2\mathbb{P}(X < Y) + \mathbb{P}(X = Y) = 1$, connaissant $\mathbb{P}(X = Y) = \dfrac{p}{1+q}$ on obtient

$$\mathbb{P}(X < Y) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{1+q}\right) = \frac{1+q-p}{2(1+q)} = \frac{q}{1+q} \qquad (q = 1-p)$$

<u>2nde méthode :</u>

Comme pour le calcul de $\mathbb{P}(X = Y)$, avec la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (X < Y)) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y > k)) \\
\mathbb{P}(X < Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}((X = k)) \times \mathbb{P}(Y > k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} pq^k \mathbb{P}(Y > k)
\end{aligned}$$

$Y(\Omega) = \mathbf{N}$ donc pour $k \in \mathbf{N}$ $\quad \mathbb{P}(Y > k) = \displaystyle\sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^i = \frac{pq^{k+1}}{1-q}$, donc

$\mathbb{P}(X < Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} pq^k \times q^{k+1} = pq \sum_{k=0}^{+\infty} q^{2k} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{q}{1+q}$.

$$\boxed{\mathbb{P}(X = Y) = \frac{p}{1+q} \text{ et } \mathbb{P}(X < Y) = \frac{q}{1+q}}$$

4. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbf{N}$ et $S = X + Y$ alors $S(\Omega) \subset \mathbf{N}$.

   $S = f(X + Y)$ avec $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x + y$, alors d'après le cours on sait que la loi de S est donnée par :

$$\begin{aligned}
\forall k \in \mathbf{N} \quad \mathbb{P}(S = k) &= \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \\ f(i,j)=k}} \mathbb{P}(X = i, Y = j) \\
&\qquad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\
&= \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \\ i+j=k}} \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j)
\end{aligned}$$

Or $\left\{\begin{array}{l}(i,j)\in\mathbf{N}^2\\ i+j=k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}i\in[\![0,k]\!]\\ j=k-i\in[\![0,k]\!]\end{array}\right.$ donc

$$\begin{array}{rcl}\forall k\in\mathbf{N}\quad \mathbb{P}(S=k) & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=k)\times\mathbb{P}(Y=k-i)\\ & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{k}pq^ipq^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}p^2q^k\\ \forall k\in\mathbf{N}\quad \mathbb{P}(S=k) & = & (k+1)p^2q^k\end{array}$$

$$\boxed{\text{La loi de } S \text{ est donnée par } S(\Omega)=\mathbf{N} \text{ et } \forall k\in\mathbf{N}\quad \mathbb{P}(S=k)=(k+1)p^2q^k}$$

Remarque :
On pouvait aussi utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X : $\mathbb{P}(S=k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}((X=i)\cap(S=k))$.