# Exercice n°1 : Oral MinesPonts 2025

Soit $\varepsilon, X$ et $Y$ trois variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\varepsilon$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ ; et que $X$ et $Y$ suivent une loi géométrique de paramètre $p \in ]0,1[$.

On considère la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} (2\varepsilon-1)X & Y \\ Y & (2\varepsilon-1)X \end{pmatrix}$.

1. Notons $A$ l'événement : « La matrice aléatoire $M$ est inversible ».
   On sait que $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(det(M) = 0)$.

$$\begin{aligned} \forall \omega \in \Omega \quad det(M(\omega)) &= \begin{vmatrix} (2\varepsilon(\omega)-1)X(\omega) & Y(\omega \\ Y(\omega) & (2\varepsilon(\omega)-1)X(\omega) \end{vmatrix} \\ &= \left((2\varepsilon(\omega)-1)X(\omega)\right)^2 - Y^2(\omega) \end{aligned}$$

   Par hypothèse $\varepsilon(\Omega) = \{0,1\}$, alors par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{A}) &= \mathbb{P}(\varepsilon = 0, det(M) = 0) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, det(M) = 0) \\ &= \mathbb{P}(\varepsilon = 0, (-X)^2 = Y^2) + \mathbb{P}(\varepsilon = 1, X^2 = Y^2) \\ &= \mathbb{P}(X^2 = Y^2) \\ & \qquad \text{par hypothèse } X(\Omega) = \mathbf{N}^* = Y(\Omega) \text{ donc} \\ \mathbb{P}(\bar{A}) &= \mathbb{P}(X = Y) \end{aligned}$$

   Par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à $X$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{A}) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, X = Y) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k, Y = k) \\ & \qquad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \text{ on a :} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(p(1-p)^{k-1}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bar{A}) &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{i} \\
& \quad \text{or } (1-p)^2 \in ]0,1[ \\
&= p^2 \times \frac{1}{1-(1-p)^2} \\
&= \frac{p^2}{2p-p^2} \\
\mathbb{P}(\bar{A}) &= \frac{p}{2-p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la probabilité que } M \text{ soit inversible est égale à } \frac{2(1-p)}{2-p}.}$$

2. Pour alléger les notations, on va laisser la notation $M$ plutôt que $M(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$. Déterminons les valeurs propres de la matrice $M$, pour cela cherchons les racines de son polynôme caractéristique $\chi_M$.

   $M$ est carrée de d'ordre 2, on sait donc que

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbf{R} \quad \chi_M(t) &= t^2 - tr(M))t + det(M) \\
&= t^2 - 2(2\varepsilon - 1)Xt + ((2\varepsilon-1)X)^2 - Y^2 \\
&= (t - (2\varepsilon-1)X)^2 - Y^2
\end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \chi_M(t) = (t - (2\varepsilon-1)X - Y) \times (t - (2\varepsilon-1)X + Y)$$

   Les valeurs propres de $M$ sont donc $\lambda = (2\varepsilon-1)X + Y$ et $\mu = (2\varepsilon-1)X - Y$.

   Notons $B$ l'événement « $M$ est à valeurs propres strictement positives. ».

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(((2\varepsilon-1)X + Y > 0) \cap ((2\varepsilon-1)X - Y > 0)\right)$$

   Comme précédemment avec le système complet d'événements associé à $\varepsilon$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((\varepsilon = 0) \cap B) + \mathbb{P}((\varepsilon = 1) \cap B) \\
&= \mathbb{P}((\varepsilon = 0) \cap (-X+Y>0) \cap (-X-Y>0) + \mathbb{P}((\varepsilon = 1) \cap (X+Y>0) \cap (X-Y>
\end{aligned}$$

Puisque $X(\Omega) = \mathbf{N}^* = Y(\Omega)$, on sait que $(X+Y>0) = \Omega$ et $(-X-Y>0) = \emptyset$, donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= 0 + \mathbb{P}((\varepsilon = 1) \cap (X - Y > 0)) \\
&\quad \text{par indépendance de } \varepsilon, X, Y \text{ et le lemme des coalitions} \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon = 1) \times \mathbb{P}(X - Y > 0) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X > Y) \\
&\quad \text{avec le système complet d'événements associé à } Y \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k, X > k) \\
&\quad X \perp\!\!\!\perp Y \\
\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) \times \mathbb{P}(X > k) \\
&\quad X \sim \mathcal{G}(p) \sim Y \text{ donc} \\
\mathbb{P}(B) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \times (1-p)^k \\
&= \frac{p(1-p)}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^{k-1} \\
\mathbb{P}(B) &= \frac{p(1-p)}{2} \times \frac{1}{(1-(1-p)^2)}
\end{aligned}$$

La probabilité que $M$ soit à valeurs propres strictement positive est égale à $\dfrac{1-p}{2(2-p)}$.

# Exercice n°2 : Extrait de Centrale PSI 2023

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in ]0,1[ \text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse $S_n$ du point à l'issue du $n$-ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \forall n \in \mathbf{N}^* \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geq 2$, quel que soit l'entier $k$ compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^{n} Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$ ) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$ ).
On introduit alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \qquad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \qquad \text{et} \qquad b_n = \mathbb{P}\big([S_1 \neq 0]\cap[S_2 \neq 0]\cap\cdots\cap[S_{2n-1} \neq 0]\cap[S_{2n} = 0]\big)$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad \text{et} \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

## Partie I

3. • Notons $U_1$ la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$. Puisque $X_1(\Omega) = \{-1, 1\}$, on a

   $U_1(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $\boxed{U_1 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \mathbb{P}(U_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = p.}$

   • Par définition $S_0 = 0$, donc $\mathbf{E}(S_0) = 0 = \mathbf{V}(S_0)$.

   • Soit $n \in \mathbf{N}^*$, posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$, on a alors $T_n = \frac{1}{2}(S_n + n)$.

   Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, par le lemme des coalitions les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes et suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p$. On sait alors que $T_n$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$. On en déduit, par linéarité de l'espérance et propriété sur la variance que :

   $$\mathbf{E}(T_n) = np = \frac{1}{2}(\mathbf{E}(S_n) + n) \qquad \mathbf{V}(T_n) = np(1-p) = \frac{1}{4}\mathbf{V}(S_n)$$

   $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{E}(S_n) = n(2p-1)$ et $\mathbf{V}(S_n) = 4np(1-p)$.

   $$\boxed{\text{L'espérance et la variance de } S_n \text{ valent respectivement } n(2p-1) \text{ et } 4np(1-p) \text{ pour } n \in \mathbf{N}}$$

**Remarque :** *Il n'est pas nécessaire de passer par une loi binomiale pour trouver l'espérance et la variance de $S_n$, puisque par indépendance des variables on a $\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k)$ et $\mathbf{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k)$, et il suffit d'avoir la loi de $\dfrac{X_k + 1}{2}$.*
*Mais quand l'énoncé indique clairement d'utiliser une loi binomiale on doit se plier à cette injonction, l'idée étant qu'on veut vérifier certains points de connaissance et pas d'autres...*

4. **Remarque :** *Il était fourni la fonction Python random.random() qui renvoie un nombre flottant psuedo-aléatoire dans l'intervalle [0,1]. En fait cette fonction simule la loi uniforme sur [0,1] c'est-à-dire le tirage d'un réel x compris entre 0 et 1 de façon aléatoire de telle sorte que $\forall p \in [0,1] \quad \mathbb{P}(x \in [0,p]) = p$. Ce qui permet de simuler une variable aléatoire $X$ qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p en tirant un nombre $x$ avec random.random() et en considérant que : $x \leqslant p \Longleftrightarrow (X = 1)$ est réalisé.*

   Voici donc une proposition de fonction Python qui renvoie le nombre de retours au point à l'origine :

```
def retours(n,p) :
    x=0 # position du point à l'origine
    r=0 # nombre de retours
    for i in range(n) :
        if random.random()⩽ p :
            x+=1 # déplacement vers la droite d'une unité
        else :
            x+=-1 # déplacement vers la gauche d'une unité
        if x == 0 : # le point est de retour à l'origine
            r+=1
    return r
```

5. Avec les notations introduites en question 3, on a $S_n = 2T_n - n$ et donc

$$a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(2T_{2n} = 2n) = \mathbb{P}(T_{2n} = n)$$

   or on a vu que $T_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ donc $T_{2n} \sim \mathcal{B}(2n,p)$ et

$$a_n = \mathbb{P}(T_{2n} = n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^{2n-n}$$

   On a bien : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ $a_n = \dbinom{2n}{n} p^n q^n$.

6. On note $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^{2n}$, cette série entière est lacunaire !

1ère méthode : avec le critère de d'Alembert

Pour $x \in \mathbf{R}^*$, on pose $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_n = a_n x^{2n}$, alors $u_n \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} &= \frac{a_{n+1}}{a_n} x^2 \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \times \frac{n!^2}{(2n)!} \times \frac{p^{n+1}q^{n+1}}{p^n q^n} \times x^2 \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \times pqx^2 \\
&= \frac{2(2n+1)}{n+1} pqx^2
\end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}}{|u_n|} = 4pqx^2$.

Par la règle de d'Alembert, on sait que si $4pqx^2 < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge absolument et si $4pqx^2 > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.

On en déduit que : si $|x| < \dfrac{1}{\sqrt{4pq}}$ alors la série $\sum a_n x^{2n}$ converge absolument donc $R \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{4pq}}$ et si $|x| > \dfrac{1}{\sqrt{4pq}}$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n x^{2n} = +\infty$ et la suite $(a_n x^{2n})$ n'est pas bornée donc $R \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4pq}}$.

On obtient finalement $R = \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$.

2ème méthode : une variante avec le critère de d'Alembert

Notons $R'$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n u^n$. Puisque $a_n > 0$, on a (calculs faits précédemment) :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} pq$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 4pq \neq 0$, et d'après le critère de d'Alembert pour les séries entières on sait que $R' = \dfrac{1}{4pq} > 0$.

Par propriété on sait que si $|u| < R'$ alors la série $\sum a_n u^n$ converge absolument et si $|u| > R'$ alors $\sum a_n u^n$ diverge grossièrement avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |a_n u^n| = +\infty$.

On en déduit que si $|x| < \sqrt{R'}$ alors $\sum a_n x^{2n}$ converge absolument et donc $R \geqslant \sqrt{R'}$, et si $|x| > \sqrt{R'}$ alors $\sum a_n x^{2n}$ diverge grossièrement avec $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n x^{2n}| = +\infty$ donc $R \leqslant \sqrt{R'}$.

$$\boxed{\text{Finalement } R = \sqrt{R'} = \frac{1}{2\sqrt{pq}}.}$$

3ème méthode : avec la définition du rayon de convergence (c'est plus long)

La série entière $\sum a_n x^{2n}$ est une série lacunaire, son rayon de convergence $R$ est celui de la série entière $\sum d_n x^n$ avec $d_{2n} = a_n$ et $d_{2n+1} = 0$.
Par définition $R = Sup\,\{\rho \in \mathbf{R}^+, \quad (d_n \rho^n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est bornée}\}$.

Soit $\rho \in ]0, +\infty[$, la suite $(d_n \rho^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée si et seulement si les deux suites extraites $(d_{2n}\rho^{2n})$ et $(d_{2n+1}\rho^{2n+1})$ sont bornées.
Par définition de $d_{2n+1}$, la suite $(d_{2n+1}\rho^{2n+1})$ est la suite nulle donc elle est toujours bornée.

$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad d_{2n}\rho^{2n} = a_n \rho^{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n \rho^{2n} = \dfrac{(2n)!}{n!^2}(pq\rho^2)^n$. Pour connaitre les valeurs de $\rho$ pour lesquelles la suite $(a_n\rho^{2n})$ est bornée, on peut chercher un équivalent avec la formule de Stirling que l'on rappelle : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\begin{aligned} a_n\rho^{2n} &\sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n} \times \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \times \frac{(pq\rho^2)^n}{2\pi n} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}(pq\rho^2)^n \\ a_n &\sim \frac{(4pq\rho^2)^n}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(a_n\rho^{2n})$ est bornée si et seulement si $|4pq\rho^2| \leqslant 1$, ce qui donne, puisque $\rho > 0$, $\rho \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{4pq}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } R = Sup\left[0, \frac{1}{\sqrt{4pq}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{pq}}.}$$

7. $A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ est définie en $x = 1$ si et set seulement si la série $\sum a_n$ conerge.

$R = \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}$ étant le rayon de convergence de la série entière définissant $A(x)$, on sait que pour tout $x \in ]-R, R[$ l'expression $A(x)$ est définie et pour $|x| > R$ l'expression

$A(x)$ n'est pas définie.

On en déduit que $A(x)$ est définie en $x = 1$ si et seulement si $1 < R$ ou $R = 1$ avec la série $\sum a_n$ qui converge.

$\forall p \in ]0, 1[ \quad pq = p(1-p) = p - p^2$, par étude d'une fonction polynomiale de degré 2, on obtient que $\forall p \in ]0, 1[ \quad p(1-p) \in \left]0, \dfrac{1}{4}\right]$ et $p(1-p) = \dfrac{1}{4} \Longleftrightarrow p = \dfrac{1}{2}$.

**Remarque :** *Nous n'avions pas encore évoqué cette propriété intéressante à connaître : $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ pour $p \in [0, 1]$ avec égalité lorsque $p = \dfrac{1}{2}$. Ce n'est pas au programme officiel mais on peut la citer en précisant qu'on le montre par étude de fonction ou par connaissance des fonctions polynômiales de degré 2 (extremum global).*

On en déduit que si $p \neq \dfrac{1}{2}$ alors $R > 1$ et donc $A(x)$ est définie en $x = 1$.

Si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $R = 1$ et $a_n = \dbinom{2n}{n} \times \dfrac{1}{4^n}$.

Par la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, alors

$$\begin{aligned} a_n &\sim \frac{1}{4^n} \times \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi(2n)} \times \left(\frac{e}{n}\right)^{2n} \frac{1}{2\pi n} \\ a_n &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \end{aligned}$$

La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente puisque $\dfrac{1}{2} < 1$, alors la série $\sum a_n$ diverge. On en déduit que $A(x)$ n'est pas définie en $x = 1$.

$$\boxed{\text{L'expression } A(x) \text{ est définie en } x = 1 \text{ si et seulement si } p \neq \frac{1}{2}}$$

8. On peut écrire $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = (1 + (-x))^{-\frac{1}{2}}$.
Alors par développement en série entière, on sait que

$$\begin{aligned} \forall x \in ]-1, 1[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}(-x)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(1/2+1)\cdots(1/2-n-1)}{n!}x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!}x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x\in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^n\times 2\times\cdots\times(2n)\times n!}x^n\\ &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!\times n!}x^n\end{aligned}$$

$$\forall x\in]-1,1[\quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}x^n$$

Par définition $\forall x\in]-R,R[\quad A(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}(pqx^2)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}(4pqx^2)^n.$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \forall x\in]-R,R[\quad A(x)=\frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}.}$$

## Partie II

9. Pour $k\in\mathbf{N}^*$, notons $B_k=\{[S_1\neq 0]\cap[S_2\neq 0]\cap\cdots\cap[S_{2k-1}\neq 0]\cap[S_{2k}=0]\}$, $B_k$ est l'événement « le point revient à l'origine pour la première fois à l'instant $2k$ ». Posons aussi $B_0=\varnothing$, on aura alors $\forall k\in\mathbf{N}\quad b_k=\mathbb{P}(B_k)$.

   Pour $n\in\mathbf{N}^*$, si $\{S_{2n}=0\}$ est réalisé alors l'indice de premier retour à l'origine est inférieur ou égal à $2n$, on en déduit qu'en décomposant l'événement $\{S_{2n}=0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, on a :

$$\{S_{2n}=0\} = \bigcup_{k=0}^{n}(\{S_{2n}=0\}\cap B_k)$$

   Par $\sigma$-additivité de la probabilité $\mathbb{P}$, l'union précédente étant une union finie d'événements incompatibles deux à deux, on obtient :

$$a_n=\mathbb{P}(S_{2n}=0)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(\{S_{2n}=0\}\cap B_k\right)$$

   **Remarque :** *Certains ont voulu prendre un système complet d'événements, mais ce système ne doit pas dépendre de $(S_{2n}=0)$, ce doit être $(E,(B_k)_{k\in\mathbf{N}})$ avec $E$ : « le point ne retourne jamais à l'origine ». Ensuite c'est dans la formule des probabilités totales qu'on va obtenir que $\mathbb{P}(E\cap(S_{2n}=0))=0=\mathbb{P}(B_k\cap(S_{2n}=0))$ pour tout $k>n$. Ce qui donnera finalement comme ci-dessus une somme pour $k=0$ à $n$.*

   Or $B_k\cap(S_{2n}=0)=(S_1\neq 0)\cap(S_2\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2k-1}\neq 0)\cap(S_{2k}=0)\cap(S_{2n}=0)$ et $S_{2n}=\sum_{i=0}^{2n}X_i=S_{2k}+\sum_{i=2k+1}^{2n}X_i$ donc

$$B_k\cap(S_{2n}=0)=(S_1\neq 0)\cap(S_2\neq 0)\cap\cdots\cap(S_{2k-1}\neq 0)\cap(S_{2k}=0)\cap\left(\sum_{i=2k+1}^{n}X_i=0\right)$$

ce qui donne

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left(B_k \cap \left(\sum_{i=2k+1}^{n} X_i = 0\right)\right)$$

Par hypothèse la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, alors par le lemme des coalitions les événements $B_k$ et $\left(\sum_{i=2k+1}^{n} X_i = 0\right)$ sont indépendants, ce qui donne

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) \times \mathbb{P}\left(\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i = 0\right)$$

Nous sommes dans les conditions écrites dans l'énoncé pour admettre que $\sum_{i=2k+1}^{2n} X_i$ suit la même loi que $\sum_{i=1}^{2n-2k} X_i$, donc

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \times \mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0)$$

$$\boxed{\text{Pour } n \in \mathbf{N}^* \text{ on a établi la relation } a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}.}$$

10. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ avec $B_n = \{[S_1 \neq 0] \cap [S_2 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\}$, on a $B_n \subset (S_{2n} = 0)$ donc $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$, la série entière définissant $B(x)$ est donc de rayon de convergence supérieur ou égal à $R$.

<u>1ère méthode :</u>

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in ]-R, R[$, on pose $u_n = b_n x^{2n}$ et $v_n = a_n x^{2n}$.

On en déduit que pour tout $x \in ]-R, R[$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument. On note $\sum w_n$ la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, alors $\sum w_n$ converge absolument avec $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Par définition

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} x^{2k+2n-2k} = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} x^{2n}$$

Par le résultat de la question 9, $\forall n \in \mathbf{N}^* \quad w_n = a_n x^{2n}$, et $w_0 = u_0 v_0 = a_0 b_0 = 0$.

On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = A(x) - a_0 = A(x) - 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = A(x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = B(x)$.

$$\boxed{\text{Finalement } \forall x \in ]-R, R[ \quad A(x) - 1 = A(x) \times B(x), \text{ avec } R = \frac{1}{2\sqrt{pq}}.}$$

<u>2ème méthode :</u>

D'après la relation : $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$, on peut écrire :

$$\forall x \in ]-R, R[ \quad A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} \right) (x^2)^n$$

Ce qui donne aussi : $A(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n u^n$ avec $\omega_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$ pour $n \in \mathbf{N}$ et $u = x^2$.

Par produit de Cauchy de deux séries entières, on sait que pour $|z| < min(R_a, R_b)$, où $R_a$ et $R_b$ sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

On a donc $\boxed{\forall x \in ]-R, R[ \quad A(x) = 1 + A(x) \times B(x)}$

11. D'après les résultats des questions 8 et 10, on a :

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2\sqrt{pq}}, \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right[ \quad \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}} - 1 = \frac{B(x)}{\sqrt{1-4pqx^2}}$$

Ce qui donne : $\boxed{B(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2} \text{ pour tout } x \in \left] -\frac{1}{2\sqrt{pq}}, \frac{1}{2\sqrt{pq}} \right[.}$

12. • On a déjà vu que $4pq \in ]0, 1]$ (question 7), alors l'expression $1 - \sqrt{1-4pqx^2}$ est toujours définie pour $x = 1$.

• $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}$ est définie en $x = 1$ si, et seulement si, la série $\sum b_n$ converge.

$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad b_n = \mathbb{P}(B_n)$ avec $B_n = \{[S_1 \neq 0] \cap [S_2 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\}$.
La suite $(B_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux, alors par $\sigma$-additivité, on sait que la série $\sum \mathbb{P}(B_n)$ converge avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} B_n\right)$.

$$\boxed{\text{L'expression qui définit } B(x) \text{ comme somme d'une série entière est définie en } x = 1}$$

## Partie III

13. Notons $A$ l'événement « le point ne revient jamais à l'origine », on sait que $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$ et $\bar{A}$ est l'événement « le point revient à l'origine »(*après un certain nombre de lancers qui est obligatoirement pair d'après ce qui a été remarqué dans l'énoncé*).

On en déduit que $\bar{A} = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} B_n$ avec $B_n = \{[S_1 \neq 0] \cap [S_2 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0]\}$.

On obtient, comme vu précédemment, $\mathbb{P}(\bar{A}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ puisque $b_0 = 0$.

On a d'après le résultat de la question 11 :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{2\sqrt{pq}}, \frac{1}{2\sqrt{pq}}\right[ \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n} = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$$

Les deux expressions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}$ et $1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ sont définies en $x = 1$ mais a-t-on égalité de ces deux expressions en $x = 1$ ?

• Si $1 \in \left]-\dfrac{1}{2\sqrt{pq}}, \dfrac{1}{2\sqrt{pq}}\right[$, alors on a bien sûr l'égalité. C'est le cas pour $p \neq \dfrac{1}{2}$ comme vu en question 7.

• Si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $R = 1$ et $1 \notin ]-R, R[$.

Mais puisque la série $\sum b_n$ converge et est à termes positifs, on obtient la convergence normale sur $[-1, 1]$ de la série de fonctions $\sum b_n x^{2n}$, alors
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \lim_{x\to 1^-} B(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - \sqrt{1 - 4pqx} = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$.

Finalement dans tous les cas $B(1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$.

On en déduit que $\mathbb{P}(A) = 1 - B(1) = \sqrt{1 - 4pq}$, or

$$1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (2p-1)^2 = (p - (1-p))^2 = (p-q)^2$$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à } |p-q|.}$$

**Fin du sujet**