

Dans tout ce chapitre E désigne un espace euclidien, $n \in \mathbf{N}^*$ désigne la dimension de E , et le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$.

1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Definition 1.1

On appelle isométrie vectorielle de E tout endomorphisme de E qui conserve la norme euclidienne :

$$u \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

On parlera plus simplement d'isométrie au lieu d'isométrie vectorielle

Proposition 1.1

Si u est une isométrie de E alors u est un automorphisme de E : $u \in GL(E)$.

Exemple 1.1

- Id_E est une isométrie.
- Toute symétrie orthogonale est une isométrie.
- **Cas particulier** : La symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H s'appelle **la réflexion d'hyperplan H** .

Proposition 1.2 *Caractérisation par conservation du produit scalaire*

u est une isométrie de E **ssi** u est un endomorphisme qui conserve le produit scalaire :

$$u \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \forall (x, y) \in E^2 \quad (u(x) | u(y)) = (x | y)$$

Une isométrie de E est également appelée un automorphisme orthogonal de E .

Proposition 1.3 *Caractérisation par action sur une base orthonormée*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormée** de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est une isométrie si, et seulement si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une base orthonormée de E .

Autrement dit : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est une isométrie **ssi** u transforme une base orthonormée de E en une base orthonormée de E .

Proposition 1.4 *Groupe orthogonal*

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E .

1. $Id_E \in O(E)$.
2. $O(E)$ est stable par composition : $\forall (u, v) \in O(E)^2, \quad u \circ v \in O(E)$.
3. $O(E)$ est stable par passage à l'inverse : $\forall u \in O(E), \quad u^{-1} \in O(E)$.

$O(E)$ s'appelle le groupe orthogonal de E , c'est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$.

Proposition 1.5 *Stabilité par une isométrie de l'orthogonal d'un sous-espace stable*

Soit u une isométrie de E .

Si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u .

2 Matrices orthogonales

On identifie $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, ce qui permet de munir ces deux derniers sous-espaces vectoriels du produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$.

2.1 Définition et caractérisations

Definition 2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On dit que A est une matrice orthogonale lorsque $A^T.A = I_n$

Proposition 2.1 *Caractérisations des matrices orthogonales*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- **Caractérisation par l'inverse :**

A est orthogonale **ssi** $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et $A^{-1} = A^T$.

A est orthogonale **ssi** $A.A^T = I_n$.

- *Caractérisation par les vecteurs colonnes :*

A est orthogonale **ssi** la famille $(C_1, \dots, C_n)$ des colonnes de A est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$.

A est orthogonale **ssi** les vecteurs-colonnes de A sont unitaires et orthogonaux 2 à 2.

- **Caractérisation par les lignes :**

A est orthogonale **ssi** la famille $(L_1, \dots, L_n)$ des lignes de A est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$.

- **Caractérisation par les coefficients :**

$A = (a_{ij})$ est une matrice orthogonale **ssi** $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$.

- **Caractérisation par changement de bases orthonormées :**

A est orthogonale **ssi** c'est une matrice de changement de bases orthonormées.

Proposition 2.2 *Caractérisation matricielle des isométries*

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E .

u est une isométrie **ssi** sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Une isométrie vectorielle s'appelle aussi un automorphisme orthogonal.

Corollaire 2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On déduit des propriétés précédentes que :

- A est orthogonale **ssi** A^T est orthogonale.
- Si A est une matrice orthogonale alors :
 $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})^2 \quad (AX|AY) = (X|Y)$ et $\|AX\| = \|X\|$
- Si $A = (a_{ij})$ est orthogonale alors :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{k=1}^n a_{kj}^2 = 1 \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 = n \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad |a_{ij}| \leq 1$$

2.2 Groupe orthogonal et groupe spécial orthogonal

Proposition 2.4 *Groupe orthogonal d'ordre n*

On note $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ou parfois $O(n)$.

1. $I_n \in O_n(\mathbf{R})$.
2. $O_n(\mathbf{R})$ est inclus dans $GL_n(\mathbf{R})$.
3. $O_n(\mathbf{R})$ est stable par produit : $\forall (A, B) \in O_n(\mathbf{R})^2 \quad AB \in O_n(\mathbf{R})$.

4. $O_n(\mathbf{R})$ est stable par passage à l'inverse : $\forall A \in O_n(\mathbf{R}) \quad A^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$.

$O_n(\mathbf{R})$ s'appelle **le groupe orthogonal d'ordre n** , c'est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbf{R}), \cdot)$.

Proposition 2.5 *Déterminant d'une matrice orthogonale*

Toute matrice orthogonale est de déterminant égal à 1 ou -1 :

$$\forall A \in O_n(\mathbf{R}) \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$$

Proposition 2.6 *Groupe spécial orthogonal d'ordre n*

On note $SO_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant égal à 1 (aussi noté $SO(n)$ ou $O_n^+(\mathbf{R})$).

1. $I_n \in SO_n(\mathbf{R})$.
2. $SO_n(\mathbf{R})$ est stable par produit : $\forall (A, B) \in SO_n(\mathbf{R})^2 \quad AB \in SO_n(\mathbf{R})$.
3. $SO_n(\mathbf{R})$ est stable par passage à l'inverse : $\forall A \in SO_n(\mathbf{R}) \quad A^{-1} \in SO_n(\mathbf{R})$.

$SO_n(\mathbf{R})$ s'appelle **le groupe spécial orthogonal d'ordre n** , c'est un sous-groupe de $(O_n(\mathbf{R}), \cdot)$.

2.3 Orientation

Proposition 2.7 *Déterminant d'une BON dans une autre BON*

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases orthonormées de l'espace euclidien E alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \{-1, +1\}$

Definition 2.2 *Orientation d'un espace euclidien*

On oriente l'espace euclidien E par le choix d'une base orthonormée $\mathcal{B}$, ce qui permet de définir la notion de base orthonormée directe.

Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée de E :

- on dit que $\mathcal{B}'$ est une **base orthonormée directe** lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = +1$
- on dit que $\mathcal{B}'$ est une **base orthonormée indirecte** lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$.

Remarque 2.1

- Les matrices de passage entre bases orthonormées directes de E sont les matrices de $SO_n(\mathbf{R})$ (matrices orthogonales de déterminant 1).
- Permuter deux vecteurs d'une base orthonormée directe, ou changer le sens d'un des vecteurs d'une base orthonormée change l'orientation (directe ou indirecte) de cette base selon les propriétés du déterminant.

3 Réduction des endomorphismes autoadjoints

3.1 Généralités sur les endomorphismes autoadjoints

Definition 3.1

On dit que u est un endomorphisme autoadjoint lorsque

$$u \in \mathcal{L}(E) \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|y) = (x|u(y))$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

Exemple 3.1

- Id_E est un endomorphisme autoadjoint.
- Soit p un projecteur de E .

p est un projecteur orthogonal ssi p est un endomorphisme autoadjoint.

Proposition 3.1 *Caractérisation matricielle*

Soit u un endomorphisme de E .

u est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si sa matrice **dans une base orthonormée** est symétrique.

Un endomorphisme autoadjoint s'appelle aussi un endomorphisme symétrique.

Remarque 3.1

- $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et $\dim \mathcal{S}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$
- Soit u un endomorphisme autoadjoint de matrice A dans une **BON**, et soit $(x, y) \in E^2$. Si X et Y sont les matrices-colonnes des vecteurs x et y dans cette base orthonormale alors

$$(u(x)|y) = X^T \cdot A \cdot Y = (x|u(y)) \quad \text{et} \quad (u(x)|x) = X^T \cdot A \cdot X$$

Proposition 3.2 *Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable*

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E et soit F un sous-espace vectoriel de E .

Si F est stable par u alors $F^\perp$ est aussi stable par u .

3.2 Théorème spectral

Proposition 3.3 *Polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle, d'un endomorphisme autoadjoint*

Si A est une matrice **symétrique réelle** alors son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbf{R}$.

Si u est un endomorphisme **autoadjoint** de E alors son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbf{R}$.

Proposition 3.4 *Théorème spectral*

Si u est un **endomorphisme autoadjoint** de E alors, il existe une **base orthonormée** de E formée de vecteurs propres de u .

On dit que u est *diagonalisable en base orthonormée*.

Si $A \in S_n(\mathbf{R})$ alors il existe $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \in D_n(\mathbf{R})$ et $P \in O_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$A = P.D.P^{-1} = P.D.P^T$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité.

Proposition 3.5 *Orthogonalité des sous-espaces propres*

Soit u un endomorphisme autoadjoint de E .

1. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u , alors les sous-espaces propres associés

E_λ et E_μ sont orthogonaux : $E_\lambda \perp E_\mu$

2. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes 2 à 2 alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont 2 à 2 orthogonaux.

3.3 Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif

Definition 3.2

Soit u un **endomorphisme autoadjoint** de E . On dit que :

1. u est **positif** lorsque :

$$\forall x \in E \quad (u(x)|x) \geq 0$$

et on notera $u \in \mathcal{S}^+(E)$.

2. u est défini-positif lorsque :

$$\forall x \in E \quad x \neq 0 \implies (u(x)|x) > 0$$

et on notera $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

Proposition 3.6 *Caractérisation spectrale*

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

- $u \in \mathcal{S}^+(E) \iff Sp(u) \subset [0, +\infty[$
- $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff Sp(u) \subset]0, +\infty[$

Definition 3.3 *Matrice symétrique positive, définie-positive*

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

On dit que :

1. S est positive lorsque : $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) \quad X^T.S.X \geq 0$.
On notera $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$.
2. S est définie-positive lorsque : $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}) \quad X \neq 0 \implies X^T.S.X > 0$.
On notera $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Proposition 3.7 *Caractérisation spectrale*

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$.

- $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \iff Sp(S) \subset [0, +\infty[$
- $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \iff Sp(S) \subset]0, +\infty[$

4 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

4.1 Produit mixte, produit vectoriel

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien de dimension $n = 2$ ou $n = 3$.

Rappel : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

On rappelle que si $x_1, \dots, x_n$ sont n vecteurs de E ,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \cdot \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque 4.1

Si $u_1, \dots, u_n$ sont n vecteurs de E alors le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est le même dans toute base orthonormée directe :

$$\mathcal{B} \text{ et } \mathcal{B}' \text{ bases orthonormées directes de } E \Rightarrow \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)$$

Definition 4.1

Soit E orienté par une base orthonormée directe $\mathcal{B}$.

- Si $n = 2$, le **produit mixte** des vecteurs u et v est le réel $[u, v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$

- Si $n = 3$, le **produit mixte** des trois vecteurs u, v, w est le réel $[u, v, w] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$

Remarque 4.2 *Interprétation géométrique*

- En dimension 2, si u et v sont deux vecteurs de E (plan euclidien orienté) alors

$[u, v]$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur u et v .

- En dimension 3, si u, v, w sont trois vecteurs de E alors

$[u, v, w]$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur u, v, w .

4.2 Produit vectoriel de deux vecteurs en dimension 3

Dans ce paragraphe E désigne un espace euclidien orienté de dimension égale à 3.

Remarque 4.3

Si u et v sont deux vecteurs de E alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E \quad [u, v, x] = (a|x)$$

Definition 4.2

Soit u et v deux vecteurs de E .

On appelle produit vectoriel de u et v , l'unique vecteur de E , noté $u \wedge v$, tel que :

$$\forall x \in E, \quad [u, v, x] = (u \wedge v | x).$$

Proposition 4.1 *Calcul dans une base orthonormée directe*

Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ sont les coordonnées des vecteurs u et v dans une base (e_1, e_2, e_3) orthonormée

directe de E alors

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Remarque 4.4

Soient u et v deux vecteurs de E .

- $(u \wedge v) \perp u$ et $(u \wedge v) \perp v$.
- Si la famille (u, v) est orthonormée alors $u \wedge v$ est l'unique vecteur tel que $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormée directe.
- Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée directe alors :

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

Remarque 4.5 *Orientation d'un plan ou d'une droite en dimension 3*

Dans un espace euclidien E orienté par une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

- On oriente un plan $H = \text{Vect}(u, v)$ par le vecteur normal $u \wedge v$.
- On oriente la droite D d'équations cartésiennes $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$ par le vecteur $u \wedge v$ où $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ et $v = a'e_1 + b'e_2 + c'e_3$.

5 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

On détermine d'abord $O_2(\mathbf{R})$ et $SO_2(\mathbf{R})$ pour obtenir les matrices orthogonales d'ordre 2, puis on détermine les isométries en dimension 2.

5.1 Matrices orthogonales d'ordre 2

Proposition 5.1

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

1. $A \in O_2(\mathbf{R})$ ssi il existe un réel θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = R(\theta) \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = S(\theta)$$

$$2. \bullet A \in SO_2(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbf{R} \quad A = R(\theta).$$

$$\bullet A \in O_2(\mathbf{R}) \setminus SO_2(\mathbf{R}) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbf{R} \quad A = S(\theta).$$

Proposition 5.2 *Propriétés des éléments de $SO_2(\mathbf{R})$*

Les éléments de $SO_2(\mathbf{R})$, i.e. $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, sont appelés **matrices de rotation**.

$$1. \forall (\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2, \quad R(\theta).R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta').R(\theta)$$

$$2. \forall \theta \in \mathbf{R}, \quad R(\theta) \text{ est inversible et } R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$$

$$3. \forall \theta \in \mathbf{R} \quad \forall p \in \mathbf{Z} \quad R(\theta)^p = R(p\theta)$$

$$4. \forall (\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2 \quad R(\theta) = R(\theta') \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi]$$

$SO_2(\mathbf{R})$ est donc commutatif.

5.2 Isométries vectorielles en dimension 2

Definition 5.1 *Rotation plane*

On appelle **rotation** du plan euclidien orienté E (rotation plane), toute isométrie vectorielle u de E telle que $\det(u) = +1$.

Proposition 5.3

Une isométrie vectorielle u est une rotation du plan euclidien orienté E **ssi** il existe $\theta \in \mathbf{R}$, tel que sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe s'écrit $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

u est alors appelée **rotation d'angle θ** .

Proposition 5.4 *Propriétés des rotations planes*

Soient r_θ la rotation d'angle θ et r_φ la rotation d'angle φ .

$$1. r_\varphi \circ r_\theta = r_\theta \circ r_\varphi \text{ est la rotation d'angle } \theta + \varphi.$$

$$2. r_\theta \in GL(E) \text{ et } r_\theta^{-1} \text{ est la rotation d'angle } -\theta.$$

$$3. \text{ Si } x \text{ est un vecteur normé alors } (x|r_\theta(x)) = \cos(\theta) \text{ et } [x, r_\theta(x)] = \sin(\theta).$$

$$4. \text{Tr}(r_\theta) = 2 \cos(\theta).$$

Definition 5.2

Soit x et y sont deux vecteurs non nuls.

On appelle mesure de l'angle orienté (x, y) le réel θ tel que
$$\begin{cases} \left(\frac{x}{\|x\|} \mid \frac{y}{\|y\|} \right) = \cos(\theta) \\ \left[\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right] = \sin(\theta) \end{cases}.$$

Definition 5.3 *Réflexion en dimension 2*

On appelle réflexion de E , toute symétrie orthogonale par rapport à une droite D . D étant appelée l'axe de la réflexion.

Proposition 5.5

Une isométrie vectorielle s du plan orienté E est une réflexion **ssi** il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que sa matrice dans une base orthonormée directe (e_1, e_2) s'écrit $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

s est alors la réflexion d'axe $D = \ker(s - Id_E) = Vect(a)$ avec $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$.

Les isométries d'un plan euclidien orienté sont donc les rotations et les réflexions.

6 Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Dans ce paragraphe E désigne un espace euclidien orienté de dimension égale à 3.

Proposition 6.1

Si u est une isométrie vectorielle de E alors $Sp(u) \subset \{-1, 1\}$.

On rappelle aussi que si u est une isométrie vectorielle de E et F est un sous-espace stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .

Remarque 6.1

Toute matrice de $SO_3(\mathbf{R})$ admet 1 pour valeur propre.

Proposition 6.2 *Matrices de $SO_3(\mathbf{R})$*

$$A \in SO_3(\mathbf{R}) \iff \exists P \in O_3(\mathbf{R}) \quad \exists \theta \in \mathbf{R} \quad , A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot P^T$$

Definition 6.1 *Rotation en dimension 3*

On appelle rotation vectorielle de E toute isométrie vectorielle de déterminant égal à 1.

Remarque 6.2

u est une rotation vectorielle de E **ssi** il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, d)$ de E telle

$$\text{que : } \begin{cases} \text{Ker}(u - Id_E) \text{ est la droite dirigée par } d \\ \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbf{Z}$ alors $u = Id_E$.

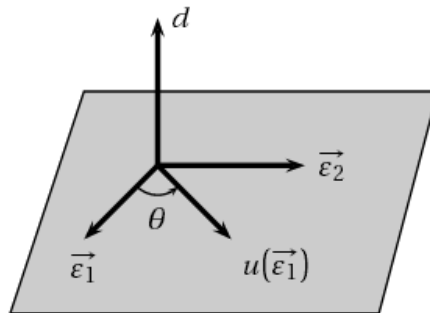
Sinon u est appelée la rotation d'axe $D = \text{Ker}(u - Id_E)$ dirigé par d et d'angle de mesure θ .

Remarque 6.3 *Reconnaître une matrice de rotation, donner son axe et son angle*

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on voit de suite si une matrice R est la matrice d'une rotation vectorielle u **SSI** la famille (C_1, C_2, C_3) des vecteurs colonnes de R est une famille orthonormée directe (penser à $C_1 \wedge C_2 = +C_3$).

- Dans ce cas, l'axe de la rotation est D l'ensemble des invariants par u (si besoin résolution de $RX = X$). On choisit alors d'orienter l'axe D par un vecteur d .
- L'axe D étant orienté par d , on choisit un vecteur ε_1 orthogonal à d .

$$\text{L'angle } \theta \text{ est alors déterminé par : } \begin{cases} \text{Tr}(R) = 2 \cos(\theta) + 1 \\ [\varepsilon_1, u(\varepsilon_1), \vec{d}] \text{ est du signe de } \sin \theta \end{cases}$$


Exemple 6.1

Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

et donner ses éléments caractéristiques.