

Exercice 1

Soit E un espace euclidien.

1. Soit $f : E \rightarrow E$ une application qui conserve le produit scalaire :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (f(x)|f(y)) = (x|y)$$

Montrer que f est linéaire, et donc $f \in O(E)$.

2. Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f(0) = 0$ et qui conserve la distance euclidienne :
 $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Montrer que $f \in O(E)$.

Exercice 2

Soit E un espace euclidien et f une isométrie de E .

1. Montrer que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = (\text{Im}(u - \text{Id}_E))^\perp$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$.

Exercice 3

Soit f une isométrie d'un espace euclidien E .

Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, f est une symétrie orthogonale.

Exercice 4

Soit E un espace euclidien de dimension égale à $n \geq 2$. On considère deux familles de vecteurs de E , $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ telles que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad (x_i|x_j) = (y_i|y_j)$$

1. Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est libre alors $(y_1, \dots, y_n)$ est libre.
2. Plus généralement, montrer que pour $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre alors $(y_1, \dots, y_p)$ est libre.
3. Montrer qu'il existe une isométrie ψ de E telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \psi(x_i) = y_i$.

Exercice 5

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x|y) = 0 \implies (f(x)|f(y)) = 0$$

1. Pour a et b deux vecteurs normés de E , calculer $(a - b|a + b)$.
2. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^+$ tel que $\forall x \in E \quad \|f(x)\| = \lambda\|x\|$.
3. En déduire qu'il existe une isométrie h de E telle que $f = \lambda.h$.

Exercice 6

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère les trois propriétés :

$$\mathcal{P}_1 : f \in \mathcal{O}(E).$$

$$\mathcal{P}_2 : f \circ f = -\text{Id}_E$$

$$\mathcal{P}_3 : \forall x \in E \quad (x|f(x)) = 0.$$

Montrer que deux de ces propriétés entraînent toujours la troisième.

Exercice 7

Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$.
2. En calculant $(AX|X)$ pour un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R})$ bien choisi, montrer que :

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n.$$

Exercice 8

Déterminer toutes les matrices $A \in O_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls. Combien y en a-t-il ?

Exercice 9

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer que $Sp_{\mathbf{C}}(A) \subset i\mathbf{R}$. On en déduit que $I_n + A$ est inversible.
2. On pose $U = (I_n - A).(I_n + A)^{-1}$. Montrer que $U \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et $-1 \notin Sp(U)$.

Exercice 10

Soit $f : \begin{matrix} E & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & (x|a)a + (x|b)b \end{matrix}$ avec (a, b) une famille libre de vecteurs unitaires de l'espace euclidien E de dimension 3.

1. Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint.
2. Trouver le noyau de f .
3. Calculer $f(a + b)$ et $f(a - b)$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f .

Exercice 11

Soit $A = (a_{ij}) \in S_n(\mathbf{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ comptées avec leur multiplicité.

Montrer que $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} a_{ij}^2$.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie-positive. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres de A ordonnées : $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

1. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbf{R}), \quad \lambda_1(X^T.X) \leq X^T.A.X \leq \lambda_n X^T.X$.
2. En déduire que tous les coefficients diagonaux de la matrice A sont strictement positifs.
3. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $A = B^T.B$.
4. Montrer qu'il existe une matrice S symétrique définie-positive telle que $A = S^2$.

Exercice 13

Soit A et B deux matrices symétriques réelles définies-positives. Montrer que $tr(AB) > 0$.

Exercice 14

L'espace euclidien usuel $\mathbf{R}^3$ est orienté par sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Écrire la matrice dans la base canonique de la rotation de $\mathbf{R}^3$ d'axe dirigé par $\vec{u} = e_1 + e_2$ et d'angle de mesure $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 15

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On cherche tous les endomorphismes f non identiquement nuls de E qui vérifient : $\forall (x, y) \in E^2 \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

1. Montrer que si f est une rotation alors f vérifie les conditions.
2. Montrer que si f vérifie les conditions alors $f(x) = 0 \iff x = 0$.
3. Montrer que si f vérifie les conditions alors f transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe (autrement dit f est une rotation).

Exercice 16

On considère la matrice $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & a \\ 4 & 8 & b \\ 4 & d & c \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.

Déterminer (a, b, c, d) pour que A soit la matrice d'une rotation et déterminer alors ses caractéristiques.

Exercice 17

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels p, q, r pour que $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{pmatrix}$ soit la matrice d'une rotation dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel.