

Dans tout ce chapitre les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux éléments et sont à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$:

$$f : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbf{R} & \rightarrow & \mathbf{R}^n \text{ ou } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

On peut écrire $f : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbf{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{array}$ ou $f : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{array}$.

Les fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont alors des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbf{R}$, appelées fonctions coordonnées de f dans la base canonique.

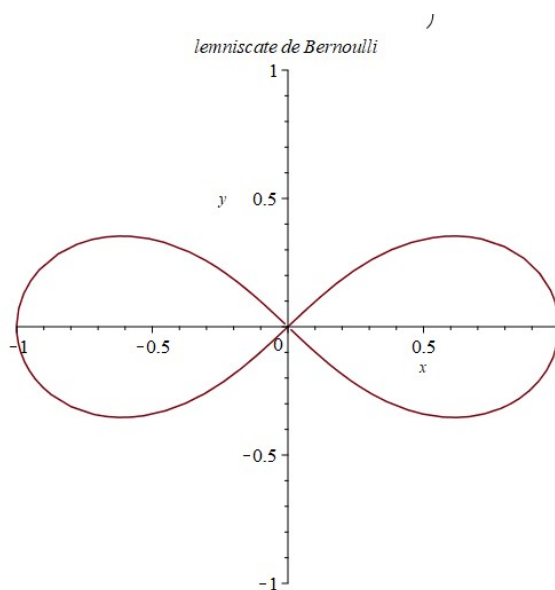
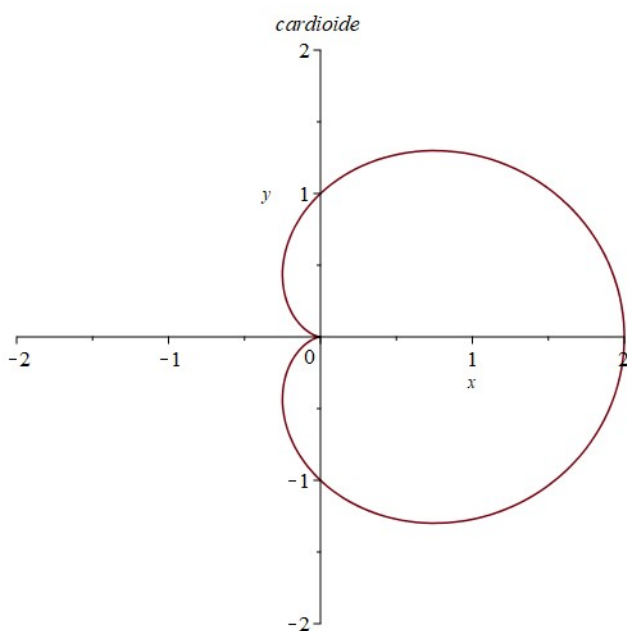
Interprétation cinématique

On peut considérer que $f(t)$ désigne la position d'un point mobile M en fonction du temps t dans l'espace $\mathbf{R}^n$, et donc la fonction f comme une courbe paramétrée :

Lorsque $n = 3$, si $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ alors on considère le point $M(t)$ de coordonnées $f(t)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ce qui revient aussi à $f(t) = \overrightarrow{OM}$ dans l'espace $\mathbf{R}^3$.

De même lorsque $n = 2$, si $f(t) = (x(t), y(t))$, on peut tracer la courbe paramétrée définie par le point mobile $M(t) = (x(t), y(t))$ dans le plan $\mathbf{R}^2$ muni de son repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exemples : Les courbes des fonctions f et g définies par $f(t) = (\cos(t)(1 + \cos(t)), \sin(t)(1 + \cos(t)))$ et $g(t) = \left(\frac{t + t^3}{1 + t^4}, \frac{t - t^3}{1 + t^4} \right)$ sont respectivement



1 Limite et continuité d'une fonction à valeurs vectorielles

On rappelle que dans $\mathbf{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.

Definition 1.1 *Limite en un point*

Soit $t_0 \in \bar{I}$ et $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbf{R}^n$. On dit que f admet ℓ pour limite en t_0 lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall t \in I, \quad |t - t_0| \leq \eta \implies \|f(t) - \ell\| \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell$ et on a :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \ell \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lim_{t \rightarrow t_0} x_k(t) = \ell_k$$

Definition 1.2 *Continuité*

Soit $t_0 \in I$, on dit que f est continue en t_0 lorsque $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$.

On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout t_0 de I .

On en déduit immédiatement que :

f est continue en $t_0 \in I$ (resp. sur I) **ssi** $x_1, \dots, x_n$ sont continues en $t_0 \in I$ (resp. sur I).

2 Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables

Definition 2.1

On dit que f est dérivable en $a \in I$ lorsque $\lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{t - a} (f(t) - f(a))$ existe et est finie.

Dans ce cas, la limite est appelée *vecteur dérivé* de f en a , noté $f'(a)$ ou $Df(a)$ ou $\frac{df}{dt}(a)$.

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point a de I .

On définit alors l'application dérivée de f , notée f' ou Df ou $\frac{df}{dt} : a \in I \mapsto \frac{df}{dt}(a)$.

Remarque 2.1

Lorsque $n = 1$, $\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est le taux d'accroissement de f entre t et a .

On en déduit que $f'(a)$ est la pente de la tangente (coefficient directeur) au graphe de f au point de coordonnées $(a, f(a))$.

La tangente en ce point a donc pour équation cartésienne :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Proposition 2.1

f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si les n fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont dérivables en a et on a :

$$\forall a \in I, \quad f'(a) = (x'_1(a), \dots, x'_n(a)).$$

Exemple 2.1

La fonction $f : t \mapsto (e^{-t}, \cos(2t) + 1, 1 + t^2)$ est définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ avec $\forall t \in \mathbf{R}, \quad f'(t) = (-e^{-t}, -2\sin(2t), 2t)$.

Remarque 2.2 *Interprétation cinématique*

Si on considère $f(t)$ comme la position d'un point mobile $M(t) = f(t)$, alors

$f'(t)$ est le vecteur vitesse vectorielle de ce point.

et si $f'(t) \neq 0$ alors c'est un vecteur directeur de la tangente à la courbe décrite par le point mobile.

Remarque 2.3 *Extension*

On peut étendre la définition et propriété précédentes à une fonction $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow E$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.

En effet si $\dim(E) = n$ alors E peut s'identifier à $\mathbf{R}^n$ au moyen d'une base :

Pour $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E , l'application $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ est un isomorphisme.

On aura donc la possibilité de parler de fonction dérivable pour une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

Soit $A : \begin{matrix} I & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t & \mapsto & (a_{ij}(t)) \end{matrix}$ alors

A est dérivable en $t_0 \in I$ ssi $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} : t \mapsto a_{ij}(t)$ est dérivable en t_0

$$\text{et } A'(t_0) = (a'_{ij}(t_0))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Développement limité d'ordre 1

On dit que f admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in I$ lorsqu'il existe un vecteur $\vec{v}$ de $\mathbf{R}^n$ tel que :

$$f(a + t) =_0 f(a) + t \cdot \vec{v} + o(t)$$

1. Si un tel développement limité existe alors il est unique.
2. f est dérivable en $a \in I$ si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en a et dans ce cas

$$f(a+t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(a) + tf'(a) + o(t)$$

On en déduit que si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Proposition 2.2 *Linéarité*

Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ sont dérivables sur I alors $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et

$$\forall a \in I, \quad (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

Proposition 2.3 *Composition*

Soient $f : J \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\varphi : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

Si φ est dérivable sur I avec $\varphi(I) \subset J$ alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I avec

$$\forall a \in I, \quad (f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) \cdot (f' \circ \varphi)(a)$$

Proposition 2.4 *Action d'une application linéaire*

Soient $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ et $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Si f est dérivable sur I alors $L \circ f$ est dérivable sur I avec

$$\forall a \in I, \quad (L \circ f)'(a) = (L \circ f')(a)$$

Proposition 2.5 *Action d'une application bilinéaire*

Soit $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $g : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$.

Si f et g sont dérivables sur I et si B est une application bilinéaire alors

$B(f, g) : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^p$
 $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I avec

$$\forall a \in I, \quad (B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$$

Exemple 2.2 Applications

1. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ sont dérivables sur I alors l'application $(f|g)$ est dérivable sur I avec

$$(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$$

2. Si $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ sont dérivables sur I alors $\varphi.f : t \in I \mapsto \varphi(t).f(t)$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad (\varphi.f)'(t) = \varphi'(t)f(t) + \varphi(t)f'(t)$$

3. Si $f : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ et $g : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ sont dérivables sur I alors $\det(f, g) : t \mapsto \det(f(t), g(t))$ est dérivable sur I avec

$$\det(f, g)' = \det(f', g) + \det(f, g').$$

Proposition 2.6 Extension aux applications p -linéaires

Soit $f_1, \dots, f_p$ des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ et M une application p -linéaire.

L'application $M(f_1, \dots, f_p) : t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$ est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, \quad (M(f_1, \dots, f_p))'(t) = \sum_{i=1}^n M(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f'_i(t), f_{i+1}(t), \dots, f_p(t))$$

3 Fonctions de classe C^k

Definition 3.1

1.

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et f' est continue sur I .

2. Par récurrence, on définit les fonctions dérivées successives sur I de f :

$$f^{(0)} = f, \text{ et pour } k \in \mathbf{N}^*, f^{(k)} = (f^{(k-1)})' = (f')^{(k-1)}$$

ainsi que les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I : f dérivable k fois et $f^{(k)}$ continue sur I .

$f^{(k)}$ se note aussi $D^k(f)$ ou $\frac{d^k f}{dt^k}$.

3. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout k de $\mathbf{N}$.

On note

- $C^0(I, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$,
- $C^k(I, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$
- $C^\infty(I, \mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I à valeurs dans $\mathbf{R}^n$.

Proposition 3.1

Soit $f : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^n$
 $t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

f est de classe C^k ($k \in \mathbf{N}^*$) sur I si et seulement si les n fonctions $x_1, \dots, x_n$ sont de classe C^k sur I

et on a : $\forall t \in I, \quad f^{(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), x_2^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t)).$

Proposition 3.2 *Linéarité*

$C^k(I, \mathbf{R}^n)$, pour $k \in \mathbf{N}$, est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel :

Si $(f, g) \in C^k(I, \mathbf{R}^n) \times C^k(I, \mathbf{R}^n)$ alors $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad (\lambda f + \beta g) \in C^k(I, \mathbf{R}^n)$ avec

$$(\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}.$$

Proposition 3.3 *Action d'une application linéaire*

On considère $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

Si f est de classe C^k sur I alors $L \circ f$ aussi avec

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad (L \circ f)^{(k)} = L \circ f^{(k)}$$

Proposition 3.4 *Formule de Leibniz*

On considère $f : I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $g : I \rightarrow \mathbf{R}^p$ et $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^q$ une application bilinéaire.

On rappelle que l'on définit l'application $B(f, g)$ de I dans $\mathbf{R}^q$ par :

$$\forall t \in I, \quad B(f, g)(t) = B(f(t), g(t))$$

Si f et g sont de classe C^k sur I alors $B(f, g)$ est de classe C^k sur I avec :

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad B(f, g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)}) \quad (\text{Formule de Leibniz})$$

Exemple 3.1

Application de ce qui précède à $(\varphi.f)^{(k)}$ avec $f : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ de classe C^k sur I .

Proposition 3.5 *Composition*

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$, si $\varphi \in C^k(J, I)$ et si $f \in C^k(I, \mathbf{R}^n)$ alors $f \circ \varphi \in C^k(J, \mathbf{R}^n)$.