

PROBLÈME : EXTRAIT DE MINES-PONTS PSI 2023 MATHS I

Notations et résultats admis

- Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ (resp. $M_{n,1}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ (resp. $n \times 1$) à coefficients réels.
- La matrice identité de $M_n(\mathbf{R})$ est notée I_n .
- Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, alors $\det(A)$ est le déterminant de la matrice A , $\text{Tr}(A)$ sa trace, $\text{Sp}(A)$ son spectre et $A^\top$ sa transposée.
- On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et à coefficients réels de taille $n \times n$.
- Sur $(M_{n,1}(\mathbf{R}))^2$, on définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par :

$$\forall (X, Y) \in (M_{n,1}(\mathbf{R}))^2, \quad \langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

où $X^\top$ est la transposée de X . On admet que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbf{R})$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée.

- On admet que l'application $A \in M_n(\mathbf{R}) \mapsto \|A\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A^\top A)}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{R})$.
- On note $S_n^+(\mathbf{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbf{R})$) l'ensemble des matrices symétriques $S \in S_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \langle SX, X \rangle \geq 0 \quad (\text{resp. } > 0).$$

- Soit C une partie non vide d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E . On dit que C est convexe si : pour tout $(x, y) \in C^2$ et tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in C$.
- On admet que si C est une partie convexe d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E , alors pour tout $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in C^p$ et pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, on a : $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \in C$.
- Une application $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel E est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

- Une application $f : C \rightarrow \mathbf{R}$ définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel est dite concave si son opposé, $-f$, est convexe, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Partie 1 : Questions préliminaires

1. • Soit $S \in S_n^+(\mathbf{R})$ et soit λ une valeur propre de S , alors $\lambda \in \mathbf{R}$ et il existe $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $SX = \lambda X$ et $X \neq 0$.

On a alors $\langle SX, X \rangle = \langle \lambda X, X \rangle \geq 0$, et par bilinéarité du produit scalaire $\lambda \langle X, X \rangle \geq 0$.

$\langle X, X \rangle = \|X\|^2 > 0$ puisque $X \neq 0$, donc $\lambda \langle X, X \rangle \geq 0 \implies \lambda \geq 0$.

On a montré que si $S \in S_n^+(\mathbf{R})$ alors $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbf{R}^+$.

- Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$ telle que $\text{Sp}(S) \subseteq \mathbf{R}^+$.

Par le théorème spectral, on sait qu'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbf{R})$ et une matrice D diagonale de coefficients diagonaux les valeurs propres (non distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de S telles que $S = P.D.P^T$.

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$,

$$\langle SX, X \rangle = (SX)^T \cdot X = X^T \cdot S \cdot X = X^T (P.D.P^T) \cdot X = (P^T X)^T \cdot D \cdot (P^T X)$$

Notons $Y = P^T \cdot X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $Y^T \cdot D \cdot Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$.

Par hypothèse $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_i \geq 0$, alors par produit et somme de réels positifs on obtient : $\langle SX, X \rangle = Y^T \cdot P \cdot Y^T \geq 0$.

Par double implication, on a montré que pour $S \in S_n(\mathbf{R})$, $S \in S_n^+(\mathbf{R}) \iff Sp(S) \subseteq \mathbf{R}^+$

De même, on admettra dans la suite du problème que : $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ si, et seulement si, $Sp(S) \subseteq \mathbf{R}_+^*$.

2. • Soit A et B deux éléments de $S_n^+(\mathbf{R})$ et $t \in [0, 1]$, notons $S = (1-t)A + tB$.

On sait que $S_n(\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$ donc $S \in S_n(\mathbf{R})$.

(On peut aussi vérifier $S^T = ((1-t)A + tB)^T = (1-t)A^T + tB^T = (1-t)A + tB = S$ puisque la transposition est linéaire.)

Pour $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$, par bilinéarité du produit scalaire on a :

$$\langle SX, X \rangle = \langle (1-t)AX + tBX, X \rangle = (1-t)\langle AX, X \rangle + t\langle BX, X \rangle$$

Or par hypothèses $\langle AX, X \rangle \geq 0$, $\langle BX, X \rangle \geq 0$, $(1-t) \geq 0$ et $t \geq 0$, alors par produit et somme de réels positifs on a $\langle SX, X \rangle \geq 0$.

On a donc $S = (1-t)A + tB \in S_n^+(\mathbf{R})$.

• Soit A et B deux éléments de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $t \in [0, 1]$, notons $S = (1-t)A + tB$.

Comme précédemment on sait que $S \in S_n(\mathbf{R})$.

Si $t = 0$ alors $S = B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et si $t = 1$ alors $S = A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Si $t \in]0, 1[$ alors, comme précédemment, pour $X \in M_{n,1}(\mathbf{R})$ avec $X \neq 0$, $\langle SX, X \rangle = (1-t)\langle AX, X \rangle + t\langle BX, X \rangle$, et par produit et somme de réels strictement positifs $\langle SX, X \rangle > 0$, donc $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Finalement $\forall t \in [0, 1] \quad S = (1-t)A + tB \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

$S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ sont des parties convexes de $M_n(\mathbf{R})$.

- I_n est symétrique puisque diagonale et admet pour seule valeur propre 1 donc $I_n \in S_n^+(\mathbf{R})$ et $I_n \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ mais $-I_n \in S_n(\mathbf{R})$ avec pour seule valeur propre -1 qui est strictement négative donc $-I_n \notin S_n^+(\mathbf{R})$ et $-I_n \notin S_n^{++}(\mathbf{R})$. $S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ ne sont pas stables par multiplication par un scalaire et donc ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$.

$S_n^+(\mathbf{R})$ et $S_n^{++}(\mathbf{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{R})$.

3. Soit $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A telles que : $A = P.D.P^T$.

Par hypothèse $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_i > 0$, alors notons $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$, on a $\mu_i > 0$ et $D = \Delta^2$ avec

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}, \text{ alors en posant } S = P.\Delta.P^T, \text{ on a, puisque } P.P^T = I_n :$$

$$S^2 = P.\Delta.P^T.P.\Delta.P^T = P.\Delta.\Delta.P^T = P.D.P^T = A$$

De plus $S^T = (P^T)^T.\Delta^T.P^T = P.\Delta.P^T = S$, donc S est symétrique réelle et de valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$ strictement positives.

On a montré que si $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ alors il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = S^2$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe.

Pour $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, notons $\mathcal{P}_p$ la propriété : pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

- Soit $p = 1$.

Tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p$, tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, est en fait un réel λ_1 tel que $\lambda_1 = 1$, et on a : pour $x_1 \in I$, $f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) \leq \lambda_1 f(x_1)$.
Donc la propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie.

- Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_p$ soit vraie.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in (\mathbf{R}_+)^{p+1}$ tel que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et soit $(x_1, \dots, x_{p+1}) \in I^{p+1}$. On a alors $\forall i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket \quad \lambda_i \in [0, 1]$.

Si $\lambda_{p+1} = 1$ alors $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \lambda_i = 0$ et donc $f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) = f(x_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i)$.

Si $\lambda_{p+1} \neq 1$ alors $1 - \lambda_{p+1} > 0$ et on peut écrire

$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) = f\left(\lambda_{p+1} x_{p+1} + (1 - \lambda_{p+1}) \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} x_i\right) = f(\lambda_{p+1} x_{p+1} + (1 - \lambda_{p+1})x)$$

avec $x = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} x_i$.

Par hypothèses $(x_1, \dots, x_p) \in I^p$, $\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{p+1}}, \dots, \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_{p+1}}\right) \in (\mathbf{R}^+)^p$ et

$$\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{p+1}} \sum_{i=1}^p \lambda_i = \frac{1 - \lambda_{p+1}}{1 - \lambda_{p+1}} = 1, \text{ alors puisque l'intervalle } I \text{ est une partie convexe}$$

non vide de $\mathbf{R}$, un des rappels de l'énoncé indiquent que $x = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} x_i$ appartient à I .

Par convexité de la fonction f on a donc :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) = f(\lambda_{p+1} x_{p+1} + (1 - \lambda_{p+1})x) \leq \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) + (1 - \lambda_{p+1}) f(x)$$

Et par l'hypothèse de récurrence : $f(x) = f\left(\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} f(x_i)$, ce qui donne :

$$f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) \leq \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) + (1 - \lambda_{p+1}) \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} f(x_i)$$

Et donc $f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i)$: la propriété $\mathcal{P}_{p+1}$ est vérifiée.

Par principe de récurrence :

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in (\mathbf{R}_+)^p \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \implies \forall (x_1, \dots, x_p) \in I^p \quad f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Jensen.

Partie 2 : Une première inégalité de convexité

Soit $M \in S_n^+(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

5. • Notons f la fonction $x \mapsto -\ln(x)$. f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ avec $\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{x}$ et $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. On en déduit que f est convexe sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

• Puisque $M \in S_n^+(\mathbf{R})$, on sait par le préliminaire que $Sp(M) \subseteq \mathbf{R}^+$, et on sait que M est diagonalisable donc le polynôme caractéristique de M est scindé et on sait alors que $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

et $\det(M) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M comptées avec leur multiplicité.

On pouvait aussi redémontrer ces formules en écrivant : il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ et

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M telles que $M = P.D.P^{-1}$. Par propriété sur la trace et le déterminant, on obtient :

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(P.D.P^{-1}) = \text{Tr}(D.P^{-1}P) = \text{Tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$$

et

$$\det(M) = \det(P.D.P^{-1}) = \det(P) \cdot \det(D) \cdot \det(P^{-1}) = \det(D) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$$

Mais c'est un peu une perte de temps.

- Si $\det(M) = 0$, comme $\text{Tr}(M) \geq 0$, on a bien : $\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geq (\det(M))^{\frac{1}{n}}$.
- Si $\det(M) \neq 0$ alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_i \neq 0$ et donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_i > 0$ et $\det(M) > 0$.

Par convexité de la fonction $f : x \mapsto -\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ et puisque $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$ avec $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) \in (\mathbf{R}^+)^n$, la dernière question du préliminaire donne :

$$f\left(\frac{\text{Tr}(M)}{n}\right) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \lambda_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f(\lambda_i)$$

Ce que l'on peut encore écrire :

$$\ln\left(\frac{\text{Tr}(M)}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)$$

Par propriétés sur la fonction $\ln$, on obtient :

$$\ln\left(\frac{\text{Tr}(M)}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right) \text{ ou encore } \ln\left(\frac{\text{Tr}(M)}{n}\right) \geq \ln\left((\det(M))^{\frac{1}{n}}\right)$$

et par croissance de la fonction exponentielle :

$$\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geq (\det(M))^{\frac{1}{n}}$$

Finalement on a toujours $\frac{\text{Tr}(M)}{n} \geq (\det(M))^{\frac{1}{n}}$.

On pourra dans la suite de cette partie utiliser, sans la prouver, l'inégalité ci-dessous :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \quad 2 \max(x_1, \dots, x_n) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n x_k^{\frac{1}{n}} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(x_k - \prod_{j=1}^n x_j^{\frac{1}{n}} \right)^2.$$

6. Par définition $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^T.M)}$ or $M \in S_n^+(\mathbf{R})$, alors $\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^2)}$. Par le théorème spectral il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $M = P.D.P^\top$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M . On en déduit que $M^2 = P.D.P^\top.P.D.P^\top = P.D^2.P^\top$, donc M^2 est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ et donc

$$\|M\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(M^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$$

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \text{ avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ les valeurs propres de } M.$$

7. En utilisant les notations de la question précédente et l'inégalité admise en fin de question 5 avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de M (qui sont toutes positives), on sait que :

$$2 \max(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_k - \prod_{k=1}^n \lambda_k^{\frac{1}{n}} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k - \prod_{j=1}^n \lambda_j^{\frac{1}{n}} \right)^2$$

Or, comme vu en question 5, $\det(M) = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ et $\text{Tr}(M) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$ donc l'inégalité précédente devient :

$$2 \max(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left(\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k - \prod_{j=1}^n \lambda_j^{\frac{1}{n}} \right)^2 \quad (*)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} I_n &= P.D.P^\top - (\det(M))^{\frac{1}{n}} P.I_n.P^\top \\ &= P \left(D - (\det(M))^{\frac{1}{n}} P.I_n \right) . P^\top \end{aligned}$$

Or $D - (\det(M))^{\frac{1}{n}} P.I_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 - (\det(M))^{\frac{1}{n}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \end{pmatrix}$, donc les valeurs propres de

$M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} I_n$ sont les réels $\lambda_1 - (\det(M))^{\frac{1}{n}}, \dots, \lambda_n - (\det(M))^{\frac{1}{n}}$ et avec le résultat de la question 6, on obtient :

$$\left\| M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} I_n \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k - \prod_{j=1}^n \lambda_j^{\frac{1}{n}} \right)^2 \quad (**)$$

De plus M n'est pas la matrice nulle donc au moins une des valeurs propres de M n'est pas nulle et donc $\max(\lambda_1, \dots, \lambda_n) > 0$ et on a alors avec (*) et (**):

$$\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\left\| M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} I_n \right\|_2^2}{2.n.\max(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$$

Il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\max(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_k > 0$, alors par croissance de la fonction racine carrée : $\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2} \geq \sqrt{\lambda_k^2} > 0$, donc par passage à l'inverse : $\frac{1}{\max(\lambda_1, \dots, \lambda_n)} \geq \frac{1}{\|M\|_2}$ et

finalement
$$\frac{\text{Tr}(M)}{n} - (\det(M))^{\frac{1}{n}} \geq \frac{\|M - (\det(M))^{\frac{1}{n}} I_n\|_2^2}{2n\|M\|_2}.$$

Partie 3 : On continue avec de la convexité

8. Soient $A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$.

D'après la question 3 (du préliminaire), on sait qu'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A = S^2$, et S est alors inversible avec $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Analyse :

On suppose qu'il existe Q inversible telle que $A = S^2 = Q.Q^T$ et $B = Q.D.Q^T$ avec D diagonale.

Puisque $Q.Q^T = S^2$, on a $Q^T = Q^{-1}S^2$ et donc $B = Q.D.Q^{-1}.S^2$.

$S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ donc S est inversible, et on a $B.S^{-1} = Q.D.Q^{-1}.S = Q.D.(Q^{-1}S)$, alors $S^{-1}.B.S^{-1} = (S^{-1}.Q).D.(S^{-1}.Q)^{-1}$. D est donc une matrice diagonale semblable à la matrice $S^{-1}.B.S^{-1}$.

Synthèse :

$S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, alors S est inversible d'inverse $S^{-1} \in S_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres sont les inverses des valeurs propres de S donc $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Par produit de matrices symétriques, $S^{-1}.B.S^{-1} \in S_n(\mathbf{R})$, donc par le théorème spectral il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ et D une matrice diagonale telles que $S^{-1}.B.S^{-1} = P.D.P^T$.

On a donc $B = (SP).D.(P^T S) = (SP).D.(SP)^T$ et $A = S.I_n.S = (SP).(P^T S) = (SP).(SP)^T$.

Par produit de matrices inversibles $Q = SP$ est inversible et vérifie $A = Q.Q^T$ et $B = Q.D.Q^T$ avec D matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice symétrique $S^{-1}BS^{-1}$.

Il existe bien une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbf{R})$ et $Q \in GL_n(\mathbf{R})$ telles que $B = QDQ^T$ et $A = QQ^T$.

Si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ alors $\forall Y \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \langle BY, Y \rangle = Y^T.B.Y > 0$, on en déduit que :

$$\forall X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \quad \langle S^{-1}BS^{-1}X, X \rangle = X^T.S^{-1}.B.S^{-1}.X = Y^T.B.Y > 0 \text{ avec } Y = S^{-1}X$$

La matrice symétrique $S^{-1}BS^{-1}$ est donc dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, donc ses valeurs propres sont strictement positives.

Si $B \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ alors tous les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs.

9. La fonction $g : t \mapsto \ln(1 + e^t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ par composée avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f'(t) = \frac{e^t}{1 + e^t} \quad f''(t) = \frac{e^t(1 + e^t) - e^t \times e^t}{(1 + e^t)^2} = \frac{e^t}{(1 + e^t)^2} > 0$$

On en déduit que la fonction $t \mapsto \ln(1 + e^t)$ est convexe sur $\mathbf{R}$.

10. Soit A et B dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, d'après le résultat de la question 8, on peut écrire $A = Q.Q^T$ et $B = Q.D.Q^T$ avec Q inversible et D diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_n$ tous strictement positifs. On en déduit que

$$\begin{aligned}\det(A + B) &= \det(Q.(I_n + D).Q^T) \\ &= \det(Q). \det(I_n + D). \det(Q^T) \\ &= (\det(Q))^2. \det(I_n + D)\end{aligned}$$

$$\det(A + B) = (\det(Q))^2 \prod_{i=1}^n (1 + d_i) > 0$$

et donc $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} = (\det(Q))^{\frac{2}{n}} \det(I_n + D)^{\frac{1}{n}}$.

Puisque $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad d_i > 0$, il existe $t_i \in \mathbf{R}$ tel que $d_i = e^{t_i}$, et par la convexité de la fonction $g : t \mapsto \ln(1 + e^t)$, on peut écrire

$$g\left(\sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} g(t_i)$$

Ce qui donne :

$$\ln\left(1 + \exp\left(\sum_{i=1}^n \frac{\ln(d_i)}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(1 + d_i)$$

ou encore

$$\ln\left(1 + \exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^n d_i^{\frac{1}{n}}\right)\right)\right) \leq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{i=1}^n (1 + d_i)\right)$$

et donc

$$\ln\left(1 + \left(\prod_{i=1}^n d_i^{\frac{1}{n}}\right)\right) \leq \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n (1 + d_i)\right)^{\frac{1}{n}}\right)$$

par croissance de la fonction $\ln$, on obtient alors

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n d_i^{\frac{1}{n}}\right) \leq \left(\prod_{i=1}^n (1 + d_i)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Ce qui se réécrit :

$$(\det(I_n))^{\frac{1}{n}} + (\det(D))^{\frac{1}{n}} \leq (\det(I_n + D))^{\frac{1}{n}}$$

et par produit par le réel strictement positif $(\det(Q))^{\frac{2}{n}} = (\det(Q). \det(Q^T))^{\frac{1}{n}}$, on obtient

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(QQ^T))^{\frac{1}{n}} + (\det(Q.D.Q^T))^{\frac{1}{n}}$$

Si A et B sont dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ alors $(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det(A))^{\frac{1}{n}} + (\det(B))^{\frac{1}{n}}$.

11. Soit A et B dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $t \in [0, 1]$.

- Si $t = 0$ ou $t = 1$ alors $(1-t)A + tB = A$ ou $(1-t)A + tB = B$ et l'inégalité $\det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t$ est une égalité qui est bien vérifiée.
- Si $t \in]0, 1[$ alors $(1-t)A \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, $tB \in S_n^{++}(\mathbf{R})$ et $(1-t)A + tB \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, on peut donc appliquer le résultat de la question 10 précédente :

$$(\det((1-t)A + tB))^{\frac{1}{n}} \geq (\det((1-t)A))^{\frac{1}{n}} + (\det(tB))^{\frac{1}{n}}$$

Tous les termes de l'inégalité sont strictement positifs, par croissance de la fonction $\ln$ et multilinéarité du déterminant, on obtient :

$$\frac{1}{n} \ln(\det((1-t)A + tB)) \geq \ln\left((1-t)(\det(A))^{\frac{1}{n}} + t(\det(B))^{\frac{1}{n}}\right)$$

Par concavité de la fonction $\ln$ on sait que

$$\ln\left((1-t)(\det(A))^{\frac{1}{n}} + t(\det(B))^{\frac{1}{n}}\right) \geq (1-t) \ln\left((\det(A))^{\frac{1}{n}}\right) + t \ln\left((\det(B))^{\frac{1}{n}}\right)$$

alors

$$\frac{1}{n} \ln(\det((1-t)A + tB)) \geq \frac{1-t}{n} \ln(\det(A)) + \frac{t}{n} \ln(\det(B))$$

Par multiplication par n :

$$\ln(\det((1-t)A + tB)) \geq \ln\left((\det(A))^{1-t}\right) + \ln\left((\det(B))^t\right)$$

et en appliquant la fonction croissante $\exp$, il vient :

$$\det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t$$

Finalement $\forall t \in [0, 1] \quad \det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t$

12. Pour A et B dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$, à partir de l'inégalité $\det((1-t)A + tB) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(B))^t$ montrée en question précédente, sachant que tous les termes sont strictement positifs, on obtient par croissance et propriété de la fonction $\ln$:

$$\forall t \in [0, 1] \quad \ln(\det((1-t)A + tB)) \geq (1-t) \ln(\det(A)) + t \ln(\det(B))$$

La fonction $\ln \circ \det$ est donc concave sur $S_n^{++}(\mathbf{R})$.

Fin du problème

EXERCICE : BECEAS ÉPREUVE COMMUNE 2021

Notations et définition

- Pour tout entier naturel n non nul, on note $M_{n,1}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles colonnes de taille n que l'on munit de sa structure euclidienne standard où le produit de deux matrices colonnes X et Y est $X^T Y$.
- On note $S_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre n et symétriques.

— On note, pour tout entier naturel n non nul et pour toute matrice $A \in S_n(\mathbf{R})$,

$$R(A) = \{X^\top A X; X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \text{ avec } X^\top X = 1\}.$$

— On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{R})$ est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{R})$ s'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbf{R})$ (i.e. vérifiant l'égalité $P^\top P = I_n$) pour laquelle $B = P^\top A P$.

13. Soit $(A, B) \in S_n(\mathbf{R})^2$. On suppose que A est orthogonalement semblable à B , il existe donc $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $B = P^\top A P$.

$$b \in R(B) \iff \exists X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad X^\top X = 1 \text{ et } b = X^\top B X$$

$$\iff \exists X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad X^\top X = 1 \text{ et } b = X^\top P^\top A P X$$

$$\iff \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad X^\top X = 1 \text{ et } b = (PX)^\top A (PX) = Y^\top A Y \text{ avec } Y = PX$$

$$\text{or } Y = PX \iff X = P^\top Y \text{ et } Y^\top Y = X^\top P^\top P X = X^\top X$$

$$\text{donc } b \in R(B) \iff \exists Y \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad Y^\top Y = 1 \text{ et } b = Y^\top A Y$$

$$b \in R(B) \iff b \in R(A)$$

On a donc montré : $R(A) = R(B)$.

On pouvait aussi procéder par deux implications plutôt que par équivalence.

14. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbf{R})$. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant, i.e. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(a) $A \in S_n(\mathbf{R})$ alors par le théorème spectral, on sait qu'il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que

$$A = P D P^\top \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \text{ D'après le résultat de la question 13, on a}$$

$$R(A) = R(D).$$

Soit $d \in R(D)$, il existe $X \in \mathbb{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $X^\top X = 1$ et $d = X^\top D X$. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

alors

$$d = X^\top D X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \quad \text{et} \quad X^\top X = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

Par hypothèse $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, or $x_i^2 \geq 0$, donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \lambda_1 x_i^2 \leq \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n x_i^2$ et par somme

$$\sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2$$

ce qui donne $\lambda_1 X^T X \leq d \leq \lambda_n X^T X$ or $X^T X = 1$ donc $\lambda_1 \leq d \leq \lambda_n$, ce qui donne :

$$R(D) \subset [\lambda_1, \lambda_n]. \quad \boxed{\text{On a ainsi prouvé : } R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n].}$$

(b) Avec les mêmes notations que dans la question précédente, on a $R(A) = R(D) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$ et

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec $X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ alors $X^T D.X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ donc

$$R(A) = R(D) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 ; \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

Soit $d \in [\lambda_1, \lambda_2]$, il existe $u \in [0, \lambda_n - \lambda_1]$ tel que $d = \lambda_1 + u$, ou encore il existe $t \in [0, 1]$ tel

que $d = \lambda_1 + t(\lambda_n - \lambda_1) = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_n$, alors en posant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$, on a

$X^T.X = (\sqrt{1-t})^2 + (\sqrt{t})^2 = 1 - t + t = 1$ et $X^T.D.X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 = (1-t)\lambda_1 + t\lambda_n = d$. On a donc $d \in R(D)$ avec $R(D) = R(A)$, ce qui donne $[\lambda_1, \lambda_n] \subset R(A)$.

$$\boxed{\text{Finalement } R(A) = [\lambda_1, \lambda_n].}$$

Autre méthode vue en ébauche dans une copie : avec de la continuité

On sait déjà que $R(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n]$. Montrons l'inclusion inverse.

$A \in S_n(\mathbf{R})$, en notant u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé à A , u est un endomorphisme autoadjoint puisque la base canonique est orthonormée. Par le théorème spectral, on sait qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres de u telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u(e_i) = \lambda_i$, et

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \quad X^T.A.X = \langle u(x), x \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i u(e_i), \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i x_i x_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

On remarque alors que $f(e_1) = \lambda_1$ et $f(e_n) = \lambda_n$ avec $f : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in S(0, 1) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ où $S(0, 1) = \{x \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x, x \rangle = 1\} \subset \mathbf{R}^n$. $S(0, 1)$ est la sphère unité de l'espace vectoriel normé $\mathbf{R}^n$.

La fonction f est polynômiale donc continue sur $S(0, 1)$ avec $f(S(0, 1)) \subset R(A)$, $f(e_1) = \lambda_1$ et $f(e_n) = \lambda_n$.

On veut obtenir $\forall d \in [\lambda_1, \lambda_n] \quad \exists x \in S(0, 1), \quad f(x) = d$, cela ressemble à du théorème des valeurs intermédiaires, mais pour utiliser ce théorème il faudrait avoir une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

La fonction $g : t \in [0, 1] \mapsto \sqrt{1-t}e_1 + \sqrt{t}e_n$ est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ car les fonctions $t\sqrt{1-t}$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ le sont.

On a aussi $\forall t \in [0, 1] \quad \|g(t)\|^2 = (\sqrt{1-t})^2 + (\sqrt{t})^2 = 1 - t + t = 1$ donc $g([0, 1]) \subset S(0, 1)$.
 (On peut aussi choisir $h : \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_n$ car $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$).

Par composée la fonction $f \circ g$ est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $R(A) \subset \mathbf{R}$ avec $f \circ g(0) = \lambda_1$ et $f \circ g(1) = \lambda_n$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires $\forall d \in [\lambda_1, \lambda_n] \quad \exists t \in [0, 1], \quad f \circ g(t) = d$.

ce qui donne : $\forall d \in [\lambda_1, \lambda_n] \quad \exists x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1$ et $d = f(x) = X^T.A.X \in R(A)$, donc $[\lambda_1, \lambda_n] \subset R(A)$.

Finalement $R(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$.

- (c) On suppose que la matrice A est de trace nulle, or on sait que $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, alors les valeurs propres de A ne sont pas toutes strictement positives ou toutes strictement négatives, donc $\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_n$, ce qui donne $0 \in [\lambda_1, \lambda_n]$.

Par le résultat de la question précédente, si $\text{Tr}(A) = 0$ alors 0 est élément de $R(A)$.

On se place dans le cas $n = 3$. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est de valeurs propres -1 et 2 donc $R(A) = [-1, 2]$. On en déduit que $0 \in R(A)$ et $\text{Tr}(A) = -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$. La réciproque du résultat encadré plus haut n'est pas vraie.

On appelle diagonale d'une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la liste $(m_{1,1}, m_{2,2}, \dots, m_{n,n})$ de ses éléments diagonaux.

15. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'on dispose d'une matrice $P \in O_n(\mathbf{R})$ pour laquelle $P^T A P$ a pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$ (où $\text{Tr } A$ désigne la trace de A).

On peut écrire $B = P^T A P = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & & (*) \\ & 0 & \\ & & \ddots \\ (**) & & & 0 \end{pmatrix} = (C_1 \quad \cdots \quad C_n)$ avec $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $P^T.A.P$.

On sait, d'après la question 13 que $R(A) = R(B)$, or en prenant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $X^T X = 1$ et

$$X^T.B.X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.C_1 = \text{Tr}(A)$$

On a donc $\text{Tr}(A) \in R(B)$, et donc $\text{Tr } A$ est élément de $R(A)$.

16. (a) D'après la question 14(b) si $A \in S_2(\mathbf{R})$ est de valeurs propres λ_1, λ_2 avec $\lambda_1 \leq \lambda_2$ alors $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$ et on sait que $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est dans } S_2(\mathbf{R}) \text{ avec } R(A) = [1, 2] \text{ et } \text{Tr}(A) = 3 \text{ donc } \text{Tr}(A) \notin R(A).$$

- (b) Soit $A \in S_2(\mathbf{R})$. Notons comme précédemment λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2$ alors on a vu $R(A) = [\lambda_1, \lambda_2]$ et $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

Montrons que $\lambda_1 + \lambda_2 \in [\lambda_1, \lambda_2] \iff 0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 \in [\lambda_1, \lambda_2] \iff \lambda_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda_2$$

$$\iff \lambda_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda_2$$

$$\iff 0 \leq \lambda_2 \text{ et } \lambda_1 \leq 0$$

$$\iff \lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 \in [\lambda_1, \lambda_2] \iff 0 \in [\lambda_1, \lambda_2]$$

Pour $A \in S_2(\mathbf{R})$, on a montré : $\text{Tr}(A) \in R(A) \iff 0 \in R(A)$.

17. Soit $A \in S_2(\mathbf{R})$.

On suppose que $\text{Tr}(A) \in R(A)$, alors il existe $X \in \mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ telle que $X^T X = 1$ et $X^T A X = \text{Tr}(A)$. La famille (X) est une famille libre puisque $X \neq 0$ et normée, on peut donc la compléter en une base orthonormée (X, Y) de $\mathbb{M}_{2,1}(\mathbf{R})$. La matrice $P = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ est alors orthogonale : $P^\top P = \begin{pmatrix} X^\top \\ Y^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^\top X & X^\top Y \\ Y^\top X & Y^\top Y \end{pmatrix} = I_2$.

Par produit de matrices par blocs,

$$B = P^\top A P = \begin{pmatrix} X^\top \\ Y^\top \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} AX & AY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^\top AX & X^\top AY \\ Y^\top AX & Y^\top AY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & Y^\top AX \\ X^\top AY & Y^\top AY \end{pmatrix}$$

et $\text{Tr}(A) + Y^\top A Y = \text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^\top A P) = \text{Tr}(A P P^\top) = \text{Tr}(A)$ et donc $Y^\top A Y = 0$ et $B = P^\top A P = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & X^\top AY \\ Y^\top AX & 0 \end{pmatrix}$.

Si $A \in S_2(\mathbf{R})$ et $\text{Tr}(A) \in R(A)$ alors A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\text{Tr}(A), 0)$.

18. Soit n un entier avec $n \geq 2$. On suppose que toute matrice $A \in S_n(\mathbf{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$ est orthogonalement semblable à une matrice ayant pour diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.
Soit $A \in S_{n+1}(\mathbf{R})$ telle que $\text{Tr } A \in R(A)$.

- (a) $\text{Tr}(A) \in R(A)$ alors il existe $X_1 \in \mathbb{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$ telle que $\|X_1\|^2 = X_1^T X_1 = 1$ et $\text{Tr}(A) = X_1^T A X_1$.

On peut compléter la famille libre et normée (X_1) en une base orthonormée $(X_1, \dots, X_{n+1})$ de $\mathbb{M}_{n+1,1}(\mathbf{R})$, alors en notant $P = \begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_{n+1} \end{pmatrix}$, on sait que $P \in O_{n+1}(\mathbf{R})$ et par produit de matrices par blocs :

$$\begin{aligned} P^T.A.P &= \begin{pmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_{n+1}^T \end{pmatrix}.A.\begin{pmatrix} X_1 & \cdots & X_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1^T \\ \vdots \\ X_{n+1}^T \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} AX_1 & \cdots & AX_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} X_1^T AX_1 & X_1^T AX_2 & \cdots & X_1^T AX_{n+1} \\ X_2^T AX_1 & X_2^T AX_2 & \cdots & X_2^T AX_{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_{n+1}^T AX_1 & X_{n+1}^T AX_2 & \cdots & X_{n+1}^T AX_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme d'une matrice par blocs :

$$P^T.A.P = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix} \text{ avec } C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad L \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbf{R}) \text{ et } B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{R})$$

De plus la matrice $P^T.A.P$ est symétrique, puisque A l'est, donc

$$\begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & C^T \\ L^T & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}$$

ce qui donne $B^T = B$.

Il existe $C \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $L \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ et $B \in S_n(\mathbf{R})$ telles que A soit orthogonalement semblable à la matrice par blocs $\begin{pmatrix} \text{Tr} A & L \\ C & B \end{pmatrix}$.

(b) Avec les notations précédentes, $P^T.A.P = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}$ donc $\text{Tr}(P^T.A.P) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$

mais on a aussi $\text{Tr}(P^T.A.P) = \text{Tr}(A.P.P^T) = \text{Tr}(A)$ donc $\text{Tr}(B) = 0$.

Et par la question 14(c), puisque $\text{Tr}(B) = 0$ on sait que $0 \in R(B)$, ce qui donne finalement :

$$\text{Tr} B \in R(B).$$

(c) En reprenant $P^T A P = \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix}$ avec $B \in S_n(\mathbf{R})$, on vient de voir que $\text{Tr}(B) = 0$ et $\text{Tr}(B) \in R(B)$ alors par l'hypothèse faite dans cette question 18, on sait qu'il existe $Q \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $B' = Q^T.B.Q$ soit de diagonale $(\text{Tr}(B), 0, \dots, 0)$, ce qui donne ici de diagonale $(0, \dots, 0)$.

En posant $U = \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ O_{n,1} & Q \end{pmatrix}$, on a

$$U^T.U = \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ O_{n,1} & Q^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ O_{n,1} & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ O_{n,1} & Q^T.Q \end{pmatrix} = I_{n+1}$$

et

$$\begin{aligned}
 U^T.P^T.A.P.U &= \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ O_{n,1} & Q^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L \\ C & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ O_{n,1} & Q \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & O_{1,n} \\ O_{n,1} & Q^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & LQ \\ C & BQ \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & LQ \\ Q^T.C & Q^T.BQ \end{pmatrix} \\
 U^T.P^T.A.P.U &= \begin{pmatrix} \text{Tr}(A) & L' \\ C' & B' \end{pmatrix} \text{ avec } B' \text{ de diagonale nulle}
 \end{aligned}$$

La matrice $H = PU$ est dans $O_{n+1}(\mathbf{R})$ par produit de matrices de $O_{n+1}(\mathbf{R})$ et $H^\top.A.H$ est une matrice de diagonale $(\text{Tr}(A), 0, \dots, 0)$.

La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\text{Tr } A, 0, \dots, 0)$.

19. Les questions 17 et 18 donnent par récurrence que $\forall n \geq 2$ si $A \in S_n(\mathbf{R})$ avec $\text{Tr}(A) \in R(A)$ alors A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\text{Tr}(A), 0, \dots, 0)$.

Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$.

- La question 14(c) donne que si $\text{Tr}(A) = 0$ alors $0 \in R(A)$ et donc $\text{Tr}(A) \in R(A)$ et alors A est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale $(\text{Tr}(A), 0, \dots, 0) = (a, \dots, a)$ avec $a = 0$.
- Si $\text{Tr}(A) \neq 0$ alors $A' = A - \frac{\text{Tr}(A)}{n}I_n$ est dans $S_n(\mathbf{R})$ et par linéarité de la trace $\text{Tr}(A') = 0$, donc A' est orthogonalement semblable à une matrice de diagonale nulle : il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ telle que $B = P^\top.A'.P$ soit de diagonale $(0, \dots, 0)$.

On en déduit que $P^\top.A.P = B + \frac{\text{Tr}(A)}{n}I_n$ est une matrice de diagonale $(a, \dots, a)$ avec $a = \frac{\text{Tr}(A)}{n}$.

Dans tous les cas si $A \in S_n(\mathbf{R})$ alors A est orthogonalement semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à $a = \frac{\text{Tr}(A)}{n}$.

Fin de l'exercice

Fin du sujet