# Fonctions de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \int_0^\pi \cos\big(x\sin(t)\big)\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $\mathbf{R}$.

2. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

3. Soit une fonction $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par :

   $$\forall (x,t) \in \mathbf{R}^2, \quad h(x,t) = \cos(t)\sin\big(x\sin(t)\big).$$

   Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbf{R}^2$.

4. En déduire que $f$ est solution de l'équation différentielle :

   $$xy'' + y' + xy = 0. \qquad (\mathbf{E})$$

5. On suppose qu'il existe une solution de $(\mathbf{E})$ développable en série entière notée $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
   Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ :

   $$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

6. En utilisant un théorème d'interversion série intégrale, montrer que $f$ est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de $f$ en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

7. Déduire des questions précédentes que $f$ est l'unique solution développable en série entière de $(\mathbf{E})$ vérifiant $f(0) = \pi$.

8. En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de $W_n$ en fonction de $n$.