

PSI - Révisions : Extrait de Centrale PSI 2019 Maths I

Analyse combinatoire de différents modèles d'urne

En 1923, le mathématicien George Pólya introduit une expérience d'urne aléatoire pour modéliser la propagation d'épidémies. Ce modèle, à base de tirages de boules colorées dans une urne, et ses généralisations ont donné naissance à un grand nombre d'études qui ont conduit à des applications variées, notamment en économie et en finance.

Au milieu des années 2000, le chercheur français Philippe Flajolet propose une nouvelle approche de ces modèles, à base de combinatoire et de séries génératrices. Sa méthode s'applique à la totalité des modèles d'urne dite « équilibrée », là où les techniques de résolution antérieures étaient spécifiques de chaque protocole de tirage.

Notations

Dans tout le problème, on définit la famille de polynômes $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ L_k = X(X+1) \cdots (X+k-1) \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On appelle fonction polynomiale de deux variables réelles u et v , toute combinaison linéaire d'applications de la forme $(u, v) \mapsto u^i v^j$ où $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

I Résultats préliminaires

I.A – Soit α un réel. On note $f_\alpha : x \mapsto (1-x)^{-\alpha}$.

Q 1. Préciser le domaine de définition D de f_α . Justifier que f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur D et donner une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par f_α sur D .

Q 2. Énoncer le théorème de Cauchy pour une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et démontrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(\alpha) \frac{x^n}{n!}.$$

Q 3. Rappeler la définition du produit de Cauchy de deux séries entières et énoncer le théorème qui s'y rapporte.

Q 4. En déduire que, pour tout entier n et tous réels α et β ,

$$L_n(\alpha + \beta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L_k(\alpha) L_{n-k}(\beta).$$

I.B –

Q 5. Pour $x \in]-1, 1[$, donner la valeur de la somme de la série entière $\sum_{p=1}^{+\infty} x^p$ ainsi que celle de sa dérivée.

Q 6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme $R_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p^n x^p = \frac{R_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

II Un modèle particulier d'urne de Pólya

On dispose d'un stock infini de boules noires et blanches. Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- on tire au hasard une boule de l'urne;
- on replace dans l'urne la boule tirée;
- on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

On définit la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires par $X_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$, X_n donne le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. On note g_n la fonction génératrice de la variable X_n . On rappelle que

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n = k) t^k.$$

Q 7. Déterminer les lois de X_1 , X_2 et X_3 puis les fonctions g_1 , g_2 et g_3 .

Q 8. Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Établir que

$$P(X_n = k) = \frac{k-1}{n+1} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{n+1-k}{n+1} P(X_{n-1} = k).$$

Q 9. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et tout réel t ,

$$g_n(t) = \frac{t^2 - t}{n+1} g'_{n-1}(t) + g_{n-1}(t)$$

Q 10. Démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t ,

$$g_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} t^k.$$

Q 11. Identifier la loi de X_n et donner son espérance.

III Modèle général d'urne équilibrée

Dans cette partie, on généralise le modèle de la partie précédente.

Soient a_0, b_0, a, b, c et d six entiers naturels. On dispose à nouveau d'un stock infini de boules noires et blanches, mais celles-ci sont cette fois numérotées, à partir de zéro, de manière à pouvoir les différencier. L'urne contient initialement a_0 boules blanches et b_0 boules noires. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- on tire au hasard une boule dans l'urne ;
- on replace cette boule dans l'urne ;
- si la boule tirée est blanche, on ajoute dans l'urne a boules blanches et b boules noires ;
- si la boule tirée est noire, on ajoute dans l'urne c boules blanches et d boules noires.

On suppose que $a + b = c + d$, on dit alors que l'urne est équilibrée et on note $s = a + b = c + d$.

Pour $n \geq 1$, une issue résultant de n tirages successifs est modélisée par le n -uplet indiquant la couleur et le numéro des boules successivement obtenues. On note Ω_n l'ensemble des issues possibles de ces n tirages.

La figure 1 donne deux exemples de 3 tirages ($n = 3$), pour $a_0 = b_0 = 1$, $a = d = 1$ et $b = c = 0$ (modèle de la partie précédente). La boule au dessus de chaque flèche représente celle qui a été tirée.

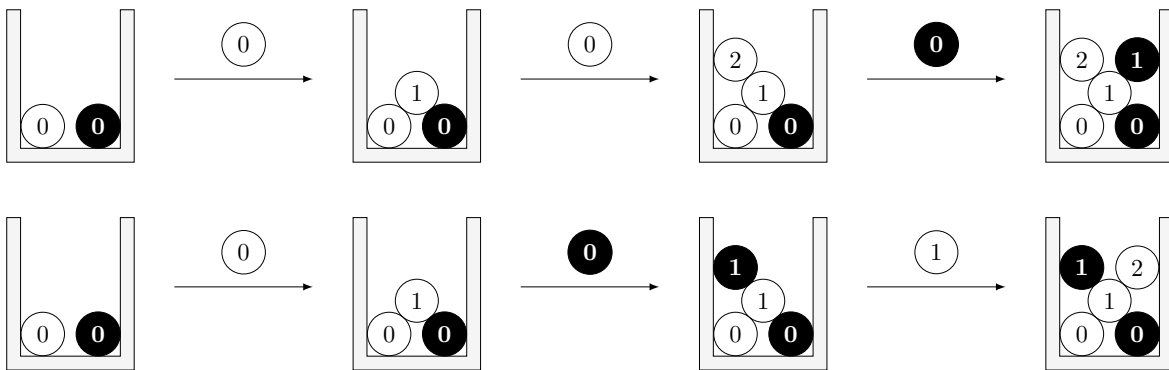


FIGURE 1 – Deux exemples de 3 tirages

La première suite de trois tirages est modélisée par l'issue $\omega_1 = (B_0, B_0, N_0) \in \Omega_3$; la deuxième suite est modélisée par l'issue $\omega_2 = (B_0, N_0, B_1) \in \Omega_3$. On note que ces deux issues différentes aboutissent à la même composition de l'urne. Pour $\omega \in \Omega_n$ on note $b(\omega)$ (respectivement $n(\omega)$), le nombre de boules blanches (respectivement noires) présentes dans l'urne à la fin des n tirages modélisés par ω .

Pour tous réels u et v , on pose $P_0(u, v) = u^a v^{b_0}$ et $P_n(u, v) = \sum_{\omega \in \Omega_n} u^{b(\omega)} v^{n(\omega)}$.

Pour $n \geq 1$, on note à nouveau X_n le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après n tirages et g_n sa fonction génératrice.

Dans les deux questions suivantes, on suppose $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a = d = 0$ et $b = c = 1$. En d'autres termes, l'urne contient, au départ, une boule blanche et, à chaque tirage, on ajoute une boule de la couleur opposée à celle qui a été tirée.

Q 12. En dressant la liste de toutes les issues possibles, donner la loi de X_3 .

Q 13. Vérifier que $P_3(u, v) = uv^3 + 4u^2v^2 + u^3v$.
On revient désormais au cas général d'une urne équilibrée.

Q 14. En examinant le nombre de boules dans l'urne juste avant chaque tirage, justifier que, pour $n \geq 1$,

$$\text{card}(\Omega_n) = (a_0 + b_0) \times \cdots \times ((a_0 + b_0 + s(n-1))) = s^n L_n \left(\frac{a_0 + b_0}{s} \right).$$

Q 15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n = k) = \frac{\text{card}(\{\omega \in \Omega_n; b(\omega) = k\})}{\text{card}\Omega_n}$$

Q 16. Justifier les égalités

$$g_n(t) = \frac{1}{\text{card}(\Omega_n)} P_n(t, 1);$$

$$E(X_n) = \frac{1}{\text{card}(\Omega_n)} \frac{\partial P_n}{\partial u}(1, 1)$$

Q 17. Démontrer que, pour tout entier n ,

$$P_{n+1}(u, v) = u^{a+1}v^b \frac{\partial P_n}{\partial u}(u, v) + u^c v^{d+1} \frac{\partial P_n}{\partial v}(u, v) \quad (\text{III.1})$$

Pour tous réel x, u et v , on pose, sous réserve d'existence,

$$H(x, u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(u, v) \frac{x^n}{n!}.$$

Soit $\rho > 0$. On pose $D_\rho =]-\rho, \rho[\times]0, 2[= \{(x, u, v) \in \mathbb{R}^3; |x| < \rho, 0 < u < 2, 0 < v < 2\}$.

Q 18. Justifier que, pour ρ assez petit, la fonction H est bien définie sur D_ρ .
On fixe un tel ρ dans toute la suite de cette partie.

Q 19. Justifier que H admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x sur le domaine D_ρ , obtenue par dérivation terme à terme par rapport à x de l'expression de H .

Q 20. Démontrer que H admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à u sur le domaine D_ρ , obtenue par dérivation terme à terme par rapport à u de l'expression de H .
On admet qu'il en est de même pour la variable v .

Q 21. Vérifier que $H(0, u, v) = u^{a_0} v^{b_0}$ puis que H est solution sur D_ρ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, u, v) = u^{a+1}v^b \frac{\partial H}{\partial u}(x, u, v) + u^c v^{d+1} \frac{\partial H}{\partial v}(x, u, v).$$